

МНОГОСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ МАКРОСЕТЕВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ¹⁾

© 2025 г. В. П. Ильин^{1,*}

¹630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Россия

*e-mail: ilin@sscc.ru

Поступила в редакцию 17.02.2025 г.

Переработанный вариант 18.03.2025 г.

Принята к публикации 27.03.2025 г.

Рассматриваются интегрированные многосеточные методы декомпозиции областей (DDM-MG) для решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными симметричными или несимметричными матрицами и, получаемых при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач. Предлагаемые алгоритмы основаны на построении однослойных или двухслойных макросеток и специальной упорядоченности узлов по их принадлежности различным топологическим примитивам макросетки: макроузлам, макрорёбрам, макрограням и подобластям. При согласованной нумерации векторных компонент матрица СЛАУ в трехмерном случае принимает блочно-трехдиагональную форму четвертого порядка. Для ее решения используется какой-либо метод приближенной факторизации в подпространствах Крылова. При этом решение вспомогательных систем в подобластях осуществляется многосеточными методами блочной неполной факторизации, на основе аналогичной тополого-ориентированной упорядоченности узлов, но не на макро-, а на микроуровне, в результате чего формируется единый преобуславливатель рекурсивно-вложенного типа. Обоснование предложенных методов проводится для матриц стилтсесовского типа. Библ. 30. Фиг. 5.

Ключевые слова: большие разреженные СЛАУ, многосеточные методы, декомпозиция областей, макросетки, преобусловленные алгоритмы, подпространства Крылова.

DOI: 10.31857/S0044466925060041, EDN: IVLXIY

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы декомпозиции областей (DDM) и многосеточные подходы (MG) являются одними из главных вычислительных технологий решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, возникающими при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач. Исторически они развивались как альтернативные направления: DDM были ориентированы главным образом на эффективное распараллеливание итерационных алгоритмов на многопроцессорных вычислительных системах (МВС), а MG-решатели зарекомендовали себя как асимптотически оптимальные по порядку методы, в которых при характерном шаге сетки $h \rightarrow 0$ объем требуемых арифметических операций прямо пропорционален размерности СЛАУ, при этом ускорение параллельных вычислений не является высоким. Теоретический анализ у этих вычислительных инструментов совершенно разный, а их программные реализации имеются во многих библиотеках (см. обширную библиографию в [1]–[18] и цитируемых там работах).

В [19] для параллелепипедоидальной сеточной расчетной области был предложен алгебро-геометрический метод декомпозиции на основе построения разделительной макросетки и разбиения узлов на четыре непересекающихся подмножества по их принадлежности различным топологическим примитивам: макроузлам, макрорёбрам, макрограням и подобластям. При соответствующей упорядоченности узлов и векторных компонент матрица СЛАУ представляется в блочно-трехдиагональной форме, а для ее решения применяются преобусловленные итерационные алгоритмы в подпространствах Крылова с использованием приближенных матричных треугольных разложений.

Отметим, что в данном подходе первая стадия алгоритма связана с анализом геометрических свойств сеточных объектов, а вторая – только с преобразованиями построенных блочных матриц, и при этом отсутствуют понятия о решениях вспомогательных краевых задач в подобластях, что является основой классических DDM.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 24-21-00402).

В работах [20], [21] аналогичный подход был предложен для многосеточного метода, но только не на макро-, а на микроуровне. Для случая двух трехмерных вложенных сеток, состоящих, например, из параллелепипедов или тетраэдров, узлы густой сетки разбиваются на четыре подмножества по их принадлежности разным топологическим примитивам редкой сетки: узлам, ребрам, граням и ячейкам. При соответствующей нумерации векторных компонент алгебраическая система также сводится к блочно-трехдиагональной форме четвертого порядка, к решению которой может быть эффективно применен алгоритм приближенной факторизации в подпространствах Крылова. Многосеточные методы определяются как рекурсивное применение двухсеточных, а матричные структуры при этом принимают вложенную блочно-трехдиагональную форму.

Естественным шагом к развитию данных двух подходов является объединение DDM и MG в одноуровневый алгебро-топологический метод с построением итерационного процесса крыловского типа с единственной предобуславливающей матрицей, конструируемой путем аппроксимации общей рекурсивной блочно-трехдиагональной структуры для исходной СЛАУ. В этом случае нумеруются сначала узлы макросети, осуществляющей декомпозицию области, а затем – внутренние узлы в подобластях с использованием для каждой из них упорядоченности алгебро-топологического типа, описанного выше для MG.

В отличие от рассмотренной в [19] однослойной разделительной макросети, мы предполагаем также декомпозицию сеточной расчетной области с помощью двухслойной макросети. В этом случае формальное разбиение на подобласти осуществляется путем разрыва реберных связей между отдельными соседними узлами. Множество полученных околограничных узлов исключается из подобластей и объединяется в макросеть, состоящую для случая кубической сетки из двухслойных макрограней, “толстых” макроребер (по четыре узла в перпендикулярном сечении) и “жирных” макроузлов (по восемь узлов в каждом). Полученная в данном алгебро-топологическом варианте DDM блочная структура СЛАУ сохраняет свой общий вид, однако конфигурация самих блоков становится более сложной.

Макросетевые разделители подобластей гарантируют высокую скорость итераций DDM, поскольку решение соответствующих “каркасных” СЛАУ обеспечивает распространение возмущения по всей расчетной области на каждом шаге.

Реализация MG-стадии комбинированного подхода при этом не меняется, как и принцип предобусловленного итерационного метода: аппроксимация блочно-трехдиагональной матрицы с помощью приближенной факторизации плюс построение какого-либо из алгоритмов крыловского типа. Отметим, что первые подходы к совместному использованию DDM и MG рассматривали в работах [22], [23].

Настоящая работа построена следующим образом. В разд. 2 мы даем краткое описание итерационных предобусловленных методов в подпространствах Крылова для симметричных и несимметричных СЛАУ. Раздел 3 содержит изложение алгебро-топологического варианта DDM с двухслойными макросетями, а разд. 4 – аналогичное описание многосеточного метода для подобластей. В разд. 5 приводится общая структура предлагаемого DDM-MG итерационного процесса и его некоторые свойства. В заключении обсуждаются возможные обобщения описываемых подходов и направления дальнейших исследований.

2. ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА

Рассмотрим вещественную невырожденную СЛАУ вида

$$Au = f, \quad A = \{a_{t,s}\} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad u = \{u_t\}, \quad f = \{f_t\} \in \mathcal{R}^N, \quad (1)$$

которую предполагаем полученной в результате аппроксимации некоторой краевой задачи на сетке Ω^h . Будем считать, что система (1) – узлового типа, т.е. каждому узлу сетки соответствует одна компонента неизвестного вектора u . В дальнейшем для иллюстрации предлагаемых нами алгоритмов используется семиточечная, или семидиагональная, СЛАУ, представляющая аппроксимацию уравнения диффузионно-конвективного типа для кубической сетки

$$\Omega^h : x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad y_j = jh, \quad j = 1, \dots, N_y, \quad z_k = kh, \quad k = 1, \dots, N_z, \quad (2)$$

и в мультииндексной форме записываемая следующим образом:

$$(Au)_{i,j,k} = a_{i,j,k}^{(0)} u_{i,j,k} - a_{i,j,k}^{(1)} u_{i-1,j,k} - a_{i,j,k}^{(2)} u_{i,j-1,k} - a_{i,j,k}^{(3)} u_{i+1,j,k} - a_{i,j,k}^{(4)} u_{i,j+1,k} - a_{i,j,k}^{(5)} u_{i,j,k-1} - a_{i,j,k}^{(6)} u_{i,j,k+1} = f_{i,j,k}, \quad (3)$$

в методических целях мы будем использовать симметричные положительно-определенные (с.п.о.) матрицы, включающие класс стилтесовых матриц (неразложимых, имеющих свойства диагонального преобладания, положительные диагональные и неположительные внедиагональные элементы, см. [24]).

Если B – некоторая легко обратимая (предобуславливающая) с.п.о. матрица, то с ее помощью в следующем общем виде формулируются предобусловленные итерационные процессы крыловского типа:

$$r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = B^{-1}r^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n p^n, \quad r^{n+1} = r^n - \alpha_n A p^n,$$

где p^n – направляющие векторы, r^0 – начальная невязка, а α_n, β_n – подлежащие определению итерационные параметры. При условиях A^γ -ортогональности направляющих векторов

$$(A^\gamma p^n, p^k) = \rho_k^{(\gamma)} \delta_{n,k}, \quad \rho_k^{(\gamma)} = (A^\gamma p^k, p^k) = \|p^k\|_\gamma^2, \quad (5)$$

где $\gamma = 0, 1, 2$, а $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера, соотношения (4) определяют функционал невязки

$$\Phi_\gamma(r^n) = (A^{\gamma-2} r^n, r^n) = (r^0, r^0)_{\gamma-2} - \sum_{k=0}^{n-1} [2\alpha_k (r^0, A^{\gamma-1} p^k) - \alpha_k^2 \rho_k], \quad (6)$$

который при выполнении соотношений

$$p^{n+1} = B^{-1} r^{n+1} + \beta_n p^n, \quad \alpha_n = \sigma_n / \rho_n, \quad (7)$$

$$\beta_n = \sigma_{n+1} / \sigma_n, \quad \sigma_n = (r^n, B^{-1} r^n), \quad \rho_n = p^n (p^n, A^\gamma)$$

достигает своего минимального значения

$$\Phi_\gamma(r^n) = \|r^0\|_{\gamma-2}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (r^0, p^k)_{\gamma-1}^2 / \rho_k. \quad (8)$$

В этом случае для выполнения условия $\|r^n\| = (r^n, r^n)^{1/2} \leq \varepsilon \|f\|$ при заданном значении $\varepsilon \ll 1$ необходимое число итераций оценивается величиной

$$n(\varepsilon) \leq \sqrt{\kappa} [(\log(2\varepsilon^{-1}))]/2, \quad (9)$$

где κ – спектральное число обусловленности матрицы $B^{-1}A$. В данном семействе предобусловленных методов сопряженных направлений (CD) значение $\gamma = 0$ соответствует алгоритму минимальных ошибок, а для $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ имеем алгоритмы сопряженных градиентов и сопряженных невязок. Более конкретно, двучленные формулы (7) определяют ортогонализацию Хестенеса–Штифаля для векторов p^n . Альтернативой здесь являются трехчленные соотношения Ланцоша, менее устойчивые к погрешностям округлений.

Если исходная СЛАУ несимметрична, то вместо CD определяются методы полусопряженных направлений (SCD) с длинными векторными рекурсиями, которые являются более ресурсоемкими. Мы рассмотрим эти алгоритмы в обобщенной форме с мультипредобуславливанием, когда новое итерационное приближение вычисляется с помощью не одного направляющего вектора p^n , а нескольких, составляющих матрицу P_n :

$$\begin{aligned} r^0 &= f - Au^0, \quad n = 0, \dots : \quad u^{n+1} = u^n + P_n \bar{\alpha}_n, \\ r^{n+1} &= r^n - AP_n \bar{\alpha}_n = r^q - AP_q \bar{\alpha}_q - \dots - AP_n \bar{\alpha}_n, \quad 0 \leq q \leq n, \\ P_n &= (p_1^n, \dots, p_{M_n}^n) \in \mathcal{R}^{N, M_n}, \quad \bar{\alpha}_n = (\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n, M_n})^\top \in \mathcal{R}^{M_n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\bar{\alpha}_n \in \mathcal{R}^{M_n}$ – векторы итерационных параметров, а p_k^n – направляющие векторы, удовлетворяющие условию полусопряженности (существенно, что в ниже следующих соотношениях $n' \leq n$):

$$\begin{aligned} (AP_k^n, A^\gamma p_{k'}^{n'}) &= \rho_{n,k}^{(\gamma)} \delta_{n,n'}, \quad \rho_{n,k}^{(\gamma)} = (AP_k^n, A^\gamma p_k^n), \\ \gamma &= 0, 1, \quad n' = 0, 1, \dots, n-1, \quad k, k' = 1, 2, \dots, M_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Если в соотношениях (10) определим коэффициенты $\bar{\alpha}_n = \{\alpha_{n,l}\}$ по формулам

$$\alpha_{n,l} = \sigma_{n,l} / \rho_{n,n}^{(\gamma)}, \quad \sigma_{n,l} = (r^0, A^\gamma \bar{p}_l^n), \quad (12)$$

то функционал невязок

$$\Phi_n^{(\gamma)}(r^{n+1}) \equiv (r^{n+1}, A^{\gamma-1} r^{n+1}) = ((r^q, A^{\gamma-1} r^q) - \sum_{k=q}^n \sum_{l=1}^{M_n} (r^q, A^\gamma p_l^k)^2 / \rho_{k,l}^{(\gamma)}), \quad q = 0, 1, \dots, n, \quad (13)$$

будет достигать своего минимального значения в блочных подпространствах Крылова:

$$\mathcal{K}_M = \text{Span}\{p_1^0, \dots, p_{M_0}^0, Ap_1^1, \dots, Ap_{M_1}^1, \dots, Ap_1^n, \dots, Ap_{M_n}^n\}, \quad (14)$$

$$M = M_0 + M_1 + \dots + M_n.$$

Ортогональные свойства направляющих векторов p_j^n в общем случае определяются с использованием различных преобуславливающих матриц $B_{n,l}$, в итоге мы получаем следующие формулы:

$$p_l^0 = B_{0,l}^{-1} r^0, \quad p_l^{n+1} = B_{n+1,l}^{-1} r^{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^{M_k} \beta_{n,k,l}^{(\gamma)} p_l^k, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$B_{n,l} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad i = 1, \dots, M_n; \quad \gamma = 0, 1, 2,$$

$$\bar{\beta}_{n,k}^{(\gamma)} = \{\beta_{n,k,l}^{(\gamma)}\} = \left(\beta_{n,k,1}^{(\gamma)} \dots \beta_{n,k,M_n}^{(\gamma)} \right)^\top \in \mathcal{R}^{M_n}, \quad (15)$$

$$\beta_{n,k,l}^{(\gamma)} = -(A^\gamma p_l^k, AB_{n+1,l}^{-1} r^{n+1}) / \rho_{n,l}^\gamma, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, \dots, n; \quad l = 1, \dots, M_n.$$

Отметим, что частные варианты рассмотренных методов для несимметричных СЛАУ эквивалентны по скорости сходимости алгоритмам типа CMRES, основанным на ортогонализации Арнольди, в том числе, с динамическим, или гибким, преобуславливанием (FGMRES, см. подробнее [25]).

Заметим также, что несимметричные СЛАУ можно решать крыловскими методами с короткими рекурсиями, если использовать алгоритмы бисопряженных направлений или симметризацию исходной системы путем предварительной трансформации Гаусса (см. [26], [27] и цитируемую там литературу).

3. МАКРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ

Построение предлагаемых макросетевых DDM состоит из двух этапов. Первый заключается в формировании блочно-трехдиагонального представления исходной СЛАУ на основе тополого-ориентированной упорядоченности узлов сеточной расчетной области, а второй – на конструировании экономичной преобуславливающей матрицы.

3.1. Тополого-ориентированные декомпозиции областей

В работе [14] для декомпозиции непересекающихся подобластей использовалась разделительная макросетка Ω^H , вложенная в исходную сетку Ω^h :

$$\Omega^H : x_{i_1}, < i_1 < i_{M_x} < N_x; \quad 1 < j_1 < j_{M_y} < N_y;$$

$$1 < k_1 < k_{M_z} < N_z, \quad \Omega^H = \Omega_V^H \cup \Omega_E^H \cup \Omega_F^H. \quad (16)$$

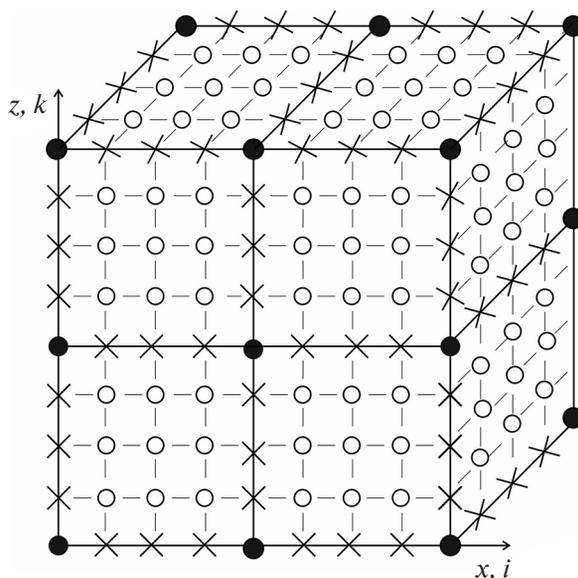
В этом случае размерности каждого макроузла, макрорребра и макрограни равны нулю, единице и двум, т.е. они представляют собой простой узел, сеточный отрезок и фрагмент сеточной плоскости. Соответствующие геометрические (или топологические) сеточные объекты представлены символами \bullet , \times , \circ на фиг. 1 с фрагментом кубической сетки.

Нумеруя последовательно все макроузлы, затем макрорреберные и макрограневые узлы, а в конце – внутренние узлы подобластей, мы получаем четыре подмножества узлов исходной сетки, а также четыре подвектора исходного сеточного решения СЛАУ (1), которая при этом принимает блочно-трехдиагональную форму четвертого порядка:

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 \\ 0 & A_{2,3} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ 0 & 0 & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Здесь диагональные блоки $A_{l,l}$ и подвекторы u_l, f_l соответствуют подмножествам $\Omega_V^h, \Omega_E^h, \Omega_F^h$ и Ω_D^h при $l = 1, 2, 3, 4$. Матрица $A_{1,1}$ в (17) является диагональной, и ее размерность равна числу макроузлов M_V , а $A_{2,2}, A_{3,3}$ и $A_{4,4}$ – блочно-диагональные матрицы, блочные порядки которых равны M_E, M_F и M_D – общему числу макрорребер, макрограней и подобластей соответственно. Если допустить для простоты, что все макрорребра имеют по N_E узлов, то размерности сформированных сеточных подмножеств и соответствующих подвекторов равны

$$N_1 = M_V, \quad N_2 = M_E N_E, \quad N_3 = M_F N_E^2, \quad N_4 = M_D N_E^3, \quad N = \sum_{l=1}^4 N_l. \quad (18)$$



Фиг. 1. Фрагмент кубической сетки с макросеточными объектами.

Описанное выше множество разделительных узлов назовем простой, или однослойной, макросетью. В этом случае каждый диагональный блок матрицы $A_{2,2}$ есть трехдиагональная матрица, а у $A_{3,3}$ и $A_{4,4}$ — пятидиагональная и семидиагональная матрицы соответственно.

Рассмотрим теперь декомпозицию сеточной области Ω^h с помощью “виртуальных” координатных плоскостей, не проходящих через узлы сетки. В этом случае на каждой сеточной линии к макросети относим пары соседних узлов, между которыми проходит разделительная плоскость:

$$\Omega^H : x_{i_1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{M_x}, x_{M_x+1}; \tag{19}$$

$$y_{j_1}, y_{j_1+1}, \dots, y_{M_y}, y_{M_y+1}; \quad z_{k_1}, z_{k_1+1}, \dots, z_{M_z}, z_{M_z+1}.$$

При этом макрогрань представляет собой фрагмент “двойной” сеточной плоскости, а трехмерное макрорребро — последовательно расположенные “четверки” узлов исходной сетки. Соответствующие макроузлы, являющиеся пересечениями тройки макрорребер, состоят из восьми узлов. Полученное таким образом множество узлов Ω^H будем называть, в отличие от (10), двойной, или двухслойной, макросетью. Для наглядности на фиг. 2 представлен фрагмент полученной структуры в двумерном случае, где символами ●, ×, ○ обозначаем макроузлы, макрорребра и внутренние узлы подобластей соответственно. При этом блочная структура СЛАУ вида (16) имеет не четвертый, а третий порядок. Для модельного примера с одинаковыми длинами макрорребер N_E размерности диагональных блоков и подвекторов, как легко проверить, оказываются равными

$$N_1 = 4M_V, \quad N_2 = 2M_E N_E, \quad N_3 = M_D N_E^2, \quad N = N_1 + N_2 + N_3. \tag{20}$$

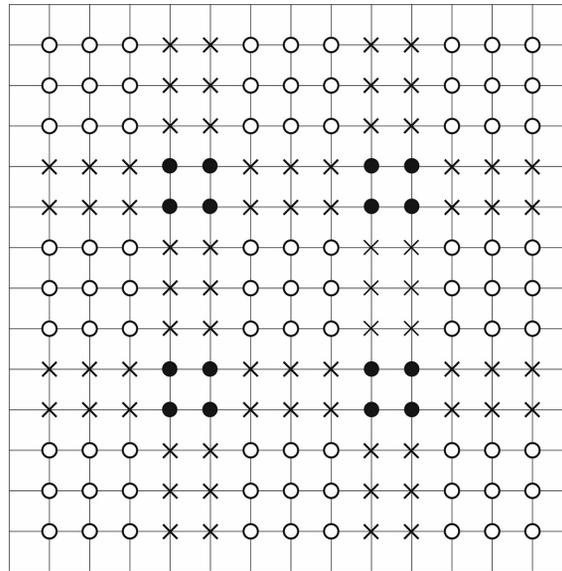
Для трехмерной двойной разделительной макрсети соответствующие величины определяются следующим образом:

$$N_1 = 8M_V, \quad N_2 = 4M_E N_E, \quad N_3 = 2M_E N_E^2, \quad N_4 = M_D N_E^3, \quad N = \sum_{l=1}^4 N_l. \tag{21}$$

В последнем случае каждый диагональный блок матрицы $A_{1,1}$ — это 4-диагональная, а у $A_{2,2}$ и $A_{3,3}$ — 6-диагональные матрицы. Матрица $A_{4,4}$ имеет ту же структуру, что и в случае простой макросетки.

3.2. Построение “макросетевых” предобуславливателей

Выше в разд. 2 были представлены формулы предобусловленных методов сопряженных или полусопряженных направлений для итерационного решения симметричных или несимметричных СЛАУ соответственно. В этом разделе мы остановимся только на вопросах построения и реализации предобуславливателей, обобщающих декомпозицию областей с использованием однослойных и двухслойных макросетей, имеющих некоторую аналогию, хотя бы терминологическую, с потенциалами простого и двойного слоев в теории интегральных



Фиг. 2. Фрагмент двойной макросети для двумерного случая, $M_x = M_y = 2$.

уравнений. Для аппроксимации матрицы исходной СЛАУ (17) можно использовать два способа ее приближенного блочно-треугольного разложения. Первый – это метод неполной факторизации с диагональной компенсацией:

$$A \approx B = \begin{bmatrix} G_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_{4,3} & G_4 \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} G_1 & A_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & A_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & A_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix},$$

где матрицы G_k определяются формулами

$$\begin{aligned} G_1 &= A_{1,1}, & G_2 &= A_{2,2} - (A_{2,1}G_1^{-1}A_{1,2})_1 - \theta S_2, \\ S_2 e_2 &= [A_{2,1}G_1^{-1}A_{1,2} - (A_{2,1}G_1^{-1}A_{1,2})_1] e_2, \\ G_3 &= A_{3,3} - (A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3})_1 - \theta S_3, \\ S_3 e_3 &= [A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3} - (A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3})_1] e_3, \\ G_4 &= A_{4,4} - (A_{4,3}G_3^{-1}A_{3,4})_1 - \theta S_4, \\ S_4 e_3 &= [A_{4,3}G_3^{-1}A_{3,4} - (A_{4,3}G_3^{-1}A_{3,4})_1] e_4. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь S_k – диагональные матрицы, а запись вида $(C)_1$ обозначает диагональную часть матрицы C , $\theta \in [0, 1]$ – параметр компенсации, а пробные векторы (обычно их компоненты берут равными единице) e_k имеют размерности N_k . Данные формулы соответствуют условию полного согласования строчных сумм $Be = Ae$ при $\theta = 1$, $e \in \mathcal{R}^N$, и они происходят от точной факторизации $(A = B)$, для которой $G_k = A_{k,k} - A_{k,k-1}C_{k+1}^{-1}A_{k+1,k}$.

Второй способ построения факторизованного предобуславливателя – это симметричный или несимметричный (в зависимости от свойств исходного СЛАУ) метод последовательной верхней релаксации (SSOR или USSOR), когда в формулах (22) матрицы G_k определяются просто как

$$G_k = \omega^{-1}A_{k,k}, \quad \omega \in (0, 2), \tag{23}$$

где ω есть релаксирующий параметр.

Отметим, что при реализации предобусловленных итерационных методов на каждом n -м шаге требуется решать вспомогательную СЛАУ вида $Bq = r$, что осуществляется по следующим экономичным формулам:

$$\begin{aligned} G_1 v_1 &= r_1, & G_2 v_2 &= r_2 - A_{2,1}v_1, & G_3 v_3 &= r_3 - A_{3,2}v_2, \\ G_4 v_4 &= r_4 - A_{4,3}v_3, & q_4 &= v_4, & G_3 w_3 &= A_{3,4}q_4, & q_3 &= v_3 - w, \\ G_2 w_2 &= A_{2,3}q_3, & q_2 &= v_2 - w_2, & q_1 &= v_1 - (G_1)^{(-1)}A_{1,2}q_2. \end{aligned} \tag{24}$$

В формулах (22) для определения матриц G_k используется фактически простейшая аппроксимация $C \approx (C)_1$. На более точных вариантах мы остановимся позже.

В этих соотношениях компоненты вектора v_4 соответствуют подмножеству узлов в M_D подобластях, для каждой из которых надо будет решать свою алгебраическую подсистему, для чего мы будем применять многосеточные методы, описываемые в следующем разделе. Здесь мы отметим, что матрица G_4 в (22) имеет тот же семиточечный портрет, что и $A_{4,4}$.

Итерационные алгоритмические возможности в макросетевом DDM возникают, если при построении преобусловленной матрицы B вместо формул (22) использовать специальную блочно-трехдиагональную структуру матричного блока $A_{2,2}$. В этом случае из первых двух блочных строк СЛАУ (17) можно сформировать подсистему

$$\bar{A}\bar{u} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = f_2 - A_{3,3}u_3, \quad (25)$$

решение которой можно найти (или выразить его через u_3) с помощью блочного метода прогонки. Рассмотрим для иллюстрации систему уравнений для двойной макросети в двумерном случае, представленном на фиг. 2:

$$\begin{aligned} -a'_t v_{t-1} + b'_t v_t - c'_t v_{t+1} + d'_t w_t &= f'_t, \\ -a''_t w_{t-1} + b''_t w_t - c''_t w_{t+1} + d''_t v_t &= f''_t, \\ t = 1, \dots, N_e, \quad v_0 = v^b, \quad w_0 = w^b, \quad v_{N_e} = v^e, \quad w_{N_e} = w^e. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь t – локальный номер сечения макроребра, расположенного между двумя макроузлами, значения искомого решения $v_b, w - B, V_t, W_t$ в которых могут рассматриваться как граничные условия для сеточной краевой задачи:

$$\begin{aligned} -A_i u_{i-1} + B_i u_i - C_i u_{i+1} &= f_i, \quad i = 1, \dots, N_e, \\ u_i = \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix}, \quad f_i = \begin{pmatrix} f'_i \\ f''_i \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} v^b \\ w^b \end{pmatrix}, \quad u_{N_e+1} = \begin{pmatrix} v^e \\ w^e \end{pmatrix}, \\ B_1 u_1 - C_1 u_2 &= f_1, \quad -A_{N_e} u_{N_e-1} + B_{N_e} u_{N_e} = f_{N_e}, \\ A_i = \begin{bmatrix} a'_i & 0 \\ 0 & a''_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b'_i & d'_i \\ d''_i & b''_i \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} c'_i & 0 \\ 0 & c''_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Ее решение можно определить с помощью прогонок прямого или обратного хода:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{N_e} = \hat{z}_{N_e}, \hat{u}_t = \hat{B}_t \hat{u}_{t+1} + \hat{z}_t, \quad t = N_e - 1, \dots, 1, \\ \check{u}_1 = \check{z}_1, \check{u}_t = \check{B}_t \check{u}_{t-1} + \check{z}_t, \quad t = 2, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (28)$$

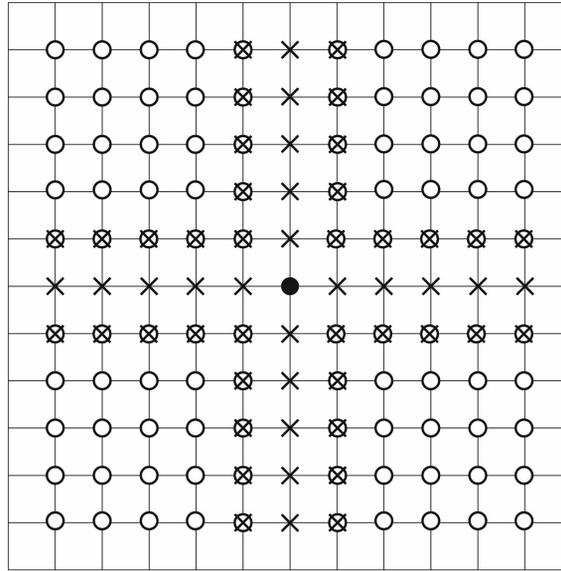
где векторы \hat{z}_t, \check{z}_t и матрицы \hat{B}_t, \check{B}_t определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 = C_1 \hat{D}_1, \quad \hat{D}_1 = B_1^{-1}, \quad \hat{\beta}_t = C_t \hat{D}_t, \quad \hat{D}_t = (B_t - A_t \hat{\beta}_{t-1}), \quad t = 2, \dots, N_e, \\ \check{\beta}_{N_e} = A_{N_e} \check{D}_{N_e}, \quad \check{D}_{N_e} = B_{N_e}^{-1}, \quad \check{\beta}_t = A_t \check{D}_t, \quad \check{D}_t = (B_t - C_t \check{\beta}_{t+1})^{-1}, \quad t = N_e - 1, \dots, 1, \\ \hat{z}_1 = (f_1 + A_1 u_0) \hat{D}_1^{-1}, \quad \hat{z}_t = (f_t + A_t \hat{z}_{t-1}) \hat{D}_t^{-1}, \quad t = 2, \dots, N_e, \\ \check{z}_{N_e} = (f_{N_e} + C_{N_e} u_{N_e+1}) \check{D}_{N_e}^{-1}, \quad \check{z}_t = (f_t + C_t \check{z}_{t+1}) \check{D}_t^{-1}, \quad t = N_e - 1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (29)$$

С помощью этих формул компоненты подвектора u_t могут быть явно выражены через макроузловые значения $\hat{z}_t, \check{z}_t, \hat{B}_t, \check{B}_t$ после подстановки в соответствующие макроузловые уравнения и исключены из системы. Полученная макроузловая подсистема низкого порядка может быть решена прямым методом, после чего значения в макрореберных узлах вычисляются по формулам прогонок (28).

Матричные соотношения (27)–(28) остаются в силе и для трехмерного случая, только матрицы и векторы становятся не второго, а четвертого порядка, и наоборот, при использовании простой макросети формулы прогонки становятся скалярными и для двумерного, и трехмерного случаев. Можно также заметить, не вдаваясь в детали, что данный подход позволяет относительно легко вычислять главную диагональ обратной матрицы A^{-1} из (25), что дает дополнительные возможности для улучшения преобусловленной матрицы.

Рассмотрим еще одно направление развития данного класса декомпозиций подобластей, которые проиллюстрируем на простейшем двумерном случае с однослойной макросетью, представленной на фиг. 3. В этом случае блочные матрицы A и B имеют третий порядок, четвертые блочные строки и столбцы отсутствуют. Новый



Фиг. 3. Фрагмент двумерной сетки с вторичной макросетью и с простой первичной макросеткой.

алгоритм строится путем замены диагональной аппроксимации матрицы $A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3}$ из (22) на более точную, имеющую четырехточечный портрет $(A_{3,2}G_2^{-1}A_{3,3})_4$. Изменения касаются только околограничных узлов подобластей, обозначенных на фиг. 3 символом \otimes , каждый соответствующий узел имеет связи с двумя ближайшими узлами из своей подобласти и с одним или двумя – из соседних (некоторые строки матрицы имеют не четыре, а пять ненулевых элементов).

Очевидно, что структурно вторичная макросеть является двухслойной и ее изображение будет типологически эквивалентно графу на фиг. 2, если из фиг. 3 удалить узлы типа \times, \bullet (размерности новых подобластей уменьшаются на один слой). В этом случае матрица G_3 (которую переобозначим $A^{(2)} = G_3$) приобретает блочный вид, аналогичный исходной $A = A^{(1)}$, и для решения соответствующей СЛАУ (приближенное вычисление v_3 в (24)) можно рекурсивно применить процедуру неполной факторизации из (22).

Сделаем теперь несколько замечаний о построении предобуславливателей для макросетевых декомпозиций подобластей.

Замечание 1. Вычислительная схема построения вторичной макросети имеет ту же блочно-матричную форму, если исходная (первичная) макросеть является не простой, а двухслойной (см. фиг. 4).

Замечание 2. Описанная схема построения вторичной макросети может быть рекурсивно продолжена для формирования m -ичных (третичных, четверичных, и т.п.) макросетей, при этом для любого m макросетки являются не более чем двухслойными, а с каждым таким шагом подобласти уменьшаются на один сеточный слой.

Замечание 3. Рекурсивные процедуры построения макросетевых DDM имеют ту же блочно-матричную структуру в трехмерном случае, что и в двумерном, в том числе, для исходных простых и двойных макросетей.

4. МНОГОСЕТОЧНОЕ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ В ПОДОБЛАСТЯХ

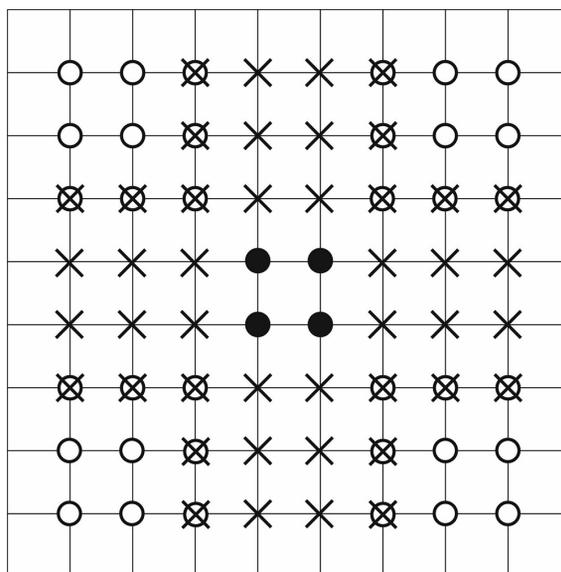
Целью данного раздела является конкретизация методов решения СЛАУ для вычисления подвектора v_4 в формулах (24). Более строго говоря, мы описываем приближенное представление для матрицы G_4 , которое завершает построение одноуровневого комбинированного DDM-MG метода в подпространствах Крылова и становится обоснованием предлагаемому подходу.

Поскольку матрица G_4 является блочно-диагональной с большим порядком M_D , задачу можно сформулировать как параллельное решение систем вида

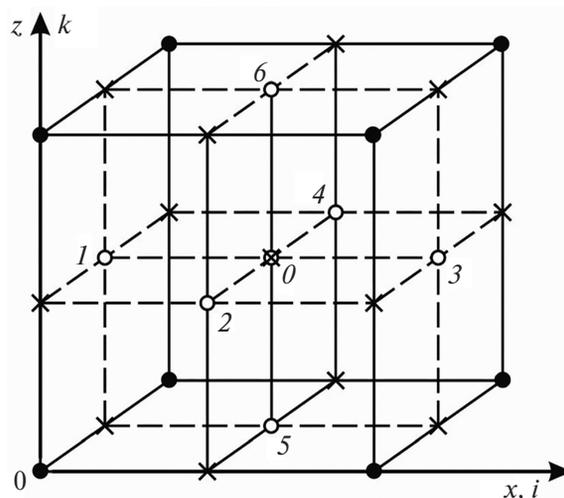
$$A_m^{(l)} v_m^{(l)} = r_m^{(l)}, \quad m = 1, \dots, M_D, \quad l = 1. \quad (30)$$

Здесь предполагается $v_4 = \{v_m^{(1)}\}$, и что во всех M_D подобластях исходные сетки $\Omega_m^h = \Omega_m^{(1)}$ примерно одинаковы по размеру (с целью эффективного распараллеливания), и в каждой из них строится последовательность вложенных сеток $\Omega_m^{(1)} \supset \dots \supset \Omega_m^{(l)} \supset \dots \supset \Omega_m^{(L)}$.

Поскольку в дальнейшем алгоритмы будем конструировать по подобластям одинаковыми, то индекс m в последующих формулах опускаем. Мы рассмотрим подробнее предлагаемые методы для случая двух сеток



Фиг. 4. Фрагмент двумерной сетки с вторичной макросетью и с двухслойной первичной макросеткой.



Фиг. 5. Иллюстрация классификации узлов для двух сеток.

$\Omega^{(1)} \supset \Omega^{(2)}$ (густой и редкой), а многосеточные алгоритмы будем определять как рекурсивное применение двухсеточных.

Разобьем множество узлов исходной (густой) сетки $\Omega^{(1)}$ в подобласти на четыре подмножества по их принадлежности разным топологическим примитивам редкой сетки $\Omega^{(2)}$: узлам, ребрам, граням и ячейкам. На фиг. 5 узлы соответствующих подмножеств обозначены \bullet , \times , \circ .

Отметим, что данные четыре подмножества:

$$\Omega_1^{(1)} \cup \Omega_2^{(1)} \cup \Omega_3^{(1)} \cup \Omega_4^{(1)} = \Omega^{(1)},$$

имеют аналогию с разбиением при макросетевой декомпозиции, но только не на макро-, а на микроуровне.

Упорядочивая далее последовательно узлы из данных подмножеств, а также соответствующие компоненты вектора $v_4 = \{v_m^{(1)}\}$ из (30): сначала нумеруем все узлы из первого подмножества, затем из второго и т.д., — мы получим матрицу $A^{(1)}$ для исходной сетки, имеющую блочно-трехдиагональную форму с блочным четвертым порядком, как и СЛАУ (17). Полученную алгебраическую систему, для удобства в дальнейшем, мы запишем

формально с верхним индексом $A^{(l)}$, имея в виду, что в нашем случае $l = 1$:

$$A^{(l)}u^{(l)} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{(l)} & A_{1,2}^{(l)} & 0 & 0 \\ A_{2,1}^{(l)} & A_{2,2}^{(l)} & A_{2,3}^{(l)} & 0 \\ 0 & A_{3,2}^{(l)} & A_{3,3}^{(l)} & A_{3,4}^{(l)} \\ 0 & 0 & A_{4,3}^{(l)} & A_{4,4}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(l)} \\ u_2^{(l)} \\ u_3^{(l)} \\ u_4^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(l)} \\ f_2^{(l)} \\ f_3^{(l)} \\ f_4^{(l)} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Отметим, что при выбранной “топологической” упорядоченности для СЛАУ вида (3) диагональные блоки $A_{k,k}^{(l)}$ являются диагональными матрицами, подматрица $A_{1,2}^{(l)}$ является шестидиагональной, а $A_{2,4}^{(l)}$ и $A_{3,4}^{(l)}$ — четырехдиагональными. Очевидно, что матрица алгебраической системы может быть приближенно факторизована ($A^{(l)} \approx B^{(l)}$), причем для диагональных блоков $G_4^{(l)}$ справедлива формула

$$G_4^{(l)} = A_{4,4}^{(l)} - A_{4,3}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1}A_{3,4}^{(l)}.$$

В этом случае портрет данной матрицы является семиточечным того же типа, что и у $A^{(l)}$, но только для более редкой сетки, в силу чего мы можем ввести обозначение $G_4^{(l)} = A^{(l+1)}$. В свою очередь, если $l+1 < L$, матрица $A^{(l+1)}$ может быть сведена к блочно-трехдиагональной форме вида (17) и приближенно факторизована, а далее такой рекурсивный процесс может быть продолжен. Напомним, что при реализации формул неполной факторизации с диагональной компенсацией на каждой итерации предобусловленного метода сопряженных градиентов необходимо решать вспомогательную СЛАУ вида $Bq = r$, что легко осуществляется по формулам вида (24).

На основе изложенных принципов построение алгебро-геометрических многосеточных методов можно предложить следующие три варианта комбинированных DDM-MG алгоритмов. Первый вариант — это использование вложенных неполных факторизаций по аналогии с работой [19]. Матричный блок G_4 из DDM разложения (22) определяем как матрицу СЛАУ $G_4 = A^{(1)}$ на исходной (густой) сетке в подобласти и проводим для нее аналогичное приближенное треугольное разложение $A^{(1)} \approx B^{(1)} = L_B^{(1)}U_B^{(1)}$. Далее такой рекурсивный процесс в каждой области продолжаем, в результате чего получаем последовательность матриц

$$A^{(1)} \approx B^{(1)} = L_B^{(1)}U_B^{(1)} \rightarrow G_4^{(1)} = \dots = A^{(l)} \approx B^{(l)} = L_B^{(l)}U_B^{(l)} \rightarrow G_4^{(l)} = \dots \Rightarrow A^{(L)} = L_A^{(L)}U_A^{(L)}.$$

Таким образом, матрица A обретает факторизованный комбинированный предобуславливатель, и мы получаем одноуровневый итерационный процесс в подпространствах Крылова, который обозначим DDM-MGa.

Относительно него можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Пусть матрица A в СЛАУ (1) является стилтьесовой. Тогда предобуславливатель B в методе DDM-MGa — это с.п.о. матрица, и для числа итераций $n(\epsilon)$ метода CG справедлива оценка (9), где k есть число обусловленности предобусловленной матрицы $B^{-1}A$.

Второй метод базируется на двухуровневом итерационном процессе, включающем решение с требуемой точностью вспомогательной системы $G_4v_4 = r_4 - A_{4,3}v_3$ из (14) с помощью описанного выше многосеточного метода, аналогичного [20]. Реализуемый при этом предобуславливатель оказывается динамическим, и применение алгоритма CG в качестве внешнего решателя для DM, строго говоря, является необоснованным. Естественный путь здесь, например, — это использование “гибкого” метода сопряженных градиентов FCG [28].

Третий вариант является развитием второго и включает дополнение алгебро-геометрического метода операциями итерационного сглаживания, используемого в классических MG-алгоритмах. Здесь могут применяться V-, W- и K-циклы, по которым имеется большая литература, и мы на этих вопросах не останавливаемся.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ DDM-MG

На основе публикаций [19]–[21] и предварительных экспериментальных исследований можно судить, что разработанные по отдельности, но на общих структурных принципах, алгебро-геометрические макросеточные методы декомпозиции областей и многосеточные подходы при их объединении в комбинированный алгоритм обещают дать синергетический эффект со значительным повышением эффективности и производительности математического и программного обеспечения. В частности, эти вопросы актуальны при решении практических задач с реальными данными, имеющими большие числа обусловленности (до 10^{14}) и высокие порядки (10^{10} – 10^{12} и более). Отметим, что зачастую при многократном решении СЛАУ в междисциплинарных проблемах с нелинейными, нестационарными и сингулярными эффектами времени расчетов на современных компьютерах могут достигать десятки часов.

Разрабатываемые вычислительные методы и технологии естественным образом распараллеливаются на многопроцессорных вычислительных системах (МВС) с распределенной и иерархической общей памятью, обеспечивая высокий уровень ускорения и эффективности использования процессоров

$$S_p = T_1(\mathcal{A})/T_p(\mathcal{A}), \quad F_p(\mathcal{A}) = S_p(\mathcal{A})/p,$$

где $T_p(\mathcal{A})$ – время расчета задачи \mathcal{A} на p процессорах.

Особенностью структур данных и алгоритмов в рассматриваемых методологиях является логическая сложность операций с алгебро-топологическими объектами, в особенности для задач с нетривиальными конфигурациями расчетной области и неструктурированными сетками. Реализация DDM-MG алгоритмов в принципе возможна и на матрицах, представленных в разрежено-сжатых формах типа CSR, но вычислительная сложность таких реализаций будет намного выше, чем при возможности использования геометрической сеточной информации. Фактически это означает необходимость разработки инструментариев нового поколения для стадий генерации сеток и построения дискретных моделей решения задач. При построении гибких и расширяемых алгебраических структур данных, с использованием средств искусственного интеллекта [29], может быть значительно повышена как эффективность разработки программных решателей, так и производительности результирующего кода.

Следующий важный шаг – это расширение класса решаемых задач и развитие самих DDM-MG алгоритмов. Сюда относятся, например, решение новых типов СЛАУ, получаемых из дискретизации систем дифференциальных уравнений и из применения аппроксимированных схем повышенного порядка. Решение таких проблем ставит на повестку дня издание новой парадигмы прикладного исследования, некоторые вопросы которого обсуждаются в [30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dolean V., Jolivet P., Nataf F.* An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation, SIAM, Philadelphia, 2015.
2. *Laevsky Y.M., Matsokin A.M.* Decomposition Methods for Solving Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Sib. Zh. Ind. Math. 1992. P. 361–372.
3. *Vassilevski Y., Olshanskii M.A.* Short Course on Multi-Grid and Domain Decomposition Methods. MAKS, Moscow, 2007.
4. *Notay Y.* Algebraic Multigrid for Stokes Equations // SIAM J. Sci. Comput. 2017. V. 39. P. 88–111.
5. *Brandt A.* Algebraic Multigrid Theory: The Symmetric Case // J. Appl. Math. Comput. 1986. № 19. P. 23–56.
6. *Olshanskii M.A.* Lecture Notes on Multigrid Methods. Inst. Vychisl. Mat., Ross. Akad. Nauk, Moscow, 2012.
7. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd ed. SIAM, 2003.
8. *Olshanskii M.A., Tyrtysnikov E.E.* Iterative Methods for Linear Systems Theory and Applications, SIAM Philadelphia, 2014.
9. *Laevsky Y.M., Matsokin A.M.* Decomposition Methods for Solving Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems (in Russian). 1999. V. 2. P. 361–372.
10. *Korneev V.G.* Fast Domain Decomposition Algorithms for Elliptic Problems with Piecewise Variable Orthotropies. in Apel T., Steinbach O. (eds) Advanced Finite Element Methods and Applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. V. 66. DOI: 10.1007/978-3-642-30316-6_3.
11. *Ильин В.П.* Итерационные предобусловленные методы в крылова: тенденции XXI в. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1786–1813.
12. *Reusken A.* A Multigrid Method Based on Incomplete Gaussian Elimination // Numer. Linear. Alg. Appl. 1996. V. 3. P. 369–390.
13. *Hackbusch W., Khoromskij B.N., Kriemann R.* Direct Schur Complement Method by Domain Decomposition Based on H-Matrix Approximation // Comput. Visual. Sci. 2005. V. 8. № 3. P. 179–188. DOI: 10.1007/s00791-005-0008-3

14. *Bornemann F.A., Deuffhard P.* The Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems // Numerische Mathematik. 1996. Dec. V. 75. № 2. P. 135–152. DOI: 10.1007/s002110050234
15. *Shaidurov V.V.* Some EYstimates of the Rate of Convergence for the Cascadic Conjugate-Gradient Method // Comput. Math. Appl. 1996. V. 31. № 4. P. 161–171. DOI: 10.1016/0898-1221(95)00228-6. Selected Topics in Numerical Methods.
16. *Notay Y., Napov A.* A Massively Parallel Solver for Discrete Poisson-like Problems // J. Comput. Phys. 2015. V. 281. P. 237–250. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.10.043
17. *Ruge J.W., Stuben K.* Algebraic Multigrid Multigrid Methods, 1987. P. 73–130. DOI: 10.1137/1.9781611971057.ch4
18. *Xu J., Zikatanov L.* Algebraic Multigrid Methods // Acta Numerica. 2017. V. 26. P. 591–721. DOI: 10.1017/S0962492917000083
19. *Il'in V.P., Gurieva Y.L., Kozlov D.I.* Parallel Domain Decomposition Methods with Graph Preconditioning. ПАВТ-23, Челябинск: Изд. ЮРГУ, 2023. С. 215–228.
20. *Il'in V.P.* Multigrid Incomplete Factorization Methods in Krylov Subspaces // J. Math. Sci. Springer. 2023. V. 272. P. 523–532.
21. *Batalov M., Il'in V.* Multigrid Incomplete Factorization Methods in Krylov Subspaces on Unstructured Grids, Parallel Computational Technologies / ed. by L. Sokolinsky [et al.]. Cham : Springer Nature Switzerland, 2024. P. 163–176.
22. *Кузнецов Ю.А.* Алгебраические многосеточные методы декомпозиции области. М., Препринт № 232 ОБМ АН СССР, 1989. С. 05–516. Springer. Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-36592-9_41
23. *Bank R., Falgout R., Jones T., Manteuffel T., McCormick S., Ruge J.* Algebraic Multigrid Domain and Range Decomposition (AMG-DD/AMG-RD) // SIAM J. Sci. Comput. 2015. V. 37. P. 113–136.
24. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007. 370 с.
25. *Knizhnerman L.A.* Error Bounds for the Arnoldi Method: A Set of Extreme Eigenpairs // J. Numer. Linear Algebra Appl. 1999. V. 296. P. 191–211.
26. *Il'in V.P.* Biconjugate Direction Methods in Krylov Subspaces // J. Appl. Indust. Math. 2010. V. 4. № 1. P. 65–78.
27. *Il'in V.P., D.I. Kozlov D.I., Petukhov A.V.* On the Minimal Residual Methods for Solving Diffusion-Convection SLAEs // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2099. P. 012005.
28. *Notay Y.* Flexible Conjugate Gradients // SIAM J. Sci. Comput. 2000. V. 22. P. 1444–1460. DOI: 10.1137/S1064827599362314
29. *Il'in V.* Parallel Intelligent Computing in Algebraic Problems. Sokolinsky L., Zymbler M. (eds). Parallel Computational Technologies. PCT 2021. Communications in Computer, 2021. P. 108–117.
30. *Ильин В.П.* Программирование ближайшего будущего: Концепция И Прагматика // Вестник РАН. 2023. Т. 93. № 2. С. 150–161. DOI: 10.31857/S086958732302007X

MULTIGRID METHODS OF MACRO-GRID DOMAIN DECOMPOSITION

B. P. Ilyin^{a,*}

^a630090 Novosibirsk, 6, Lavrentiev Ave., Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Russia

*e-mail: ilin@sscc.ru

Received: 17.02.2025

Revised: 18.03.2025

Accepted: 27.03.2025

Abstract. We consider integrated multigrid domain decomposition methods (DDM-MG) for solving large systems of linear algebraic equations (SLAEs) with sparse symmetric or asymmetric matrices and multivariate boundary value problems obtained by grid approximations. The proposed algorithms are based on the construction of single-layer or two-layer macrogrids and special ordering of nodes according to their belonging to different topological primitives of the macrogrid: macro nodes, macro edges, macro faces and subareas. At coordinated numbering of vector components, the SLAU matrix in the three-dimensional case takes a block-tri-diagonal form of the fourth order. For its solution we use some method of approximate filtering in Krylov subspaces. At the same time, the solution of auxiliary systems in subspaces is carried out by multigrid methods of block incomplete factorization, on the basis of similar topology-oriented ordering of nodes, but not at the macro-, but at the micro-level, resulting in the formation of a single preconditioner of recursive-nested type. The justification of the proposed methods is carried out for Stiltjes-type matrices.

Keywords: large sparse SLAEs, multigrid methods, area decomposition, macrogrids, preconditioned algorithms, Krylov subspaces.