Федюшкин А. И., Иванов К. А., Пунтус А. А. Эффективный многосеточный метод решения задач высокочастотной вибрационной конвекции 171

• **Хайретдинов М. С., Михайлов А. А., Ковалевский В. В., Пинигина Д. Л., Якименко А. А.** Численно-аналитические методы расчёта волновых полей и восстановления скоростных характеристик неоднородных упругих сред Байкальской рифтовой зоны 188

Чупров П. А., Фортова С. В., Уткин П. С. Численное исследование взаимодействия взрывной волны со слоем жидкостной пены с учётом эффекта компактирования . 204

Шепелев В. В. Гидродинамическое моделирование индуцированных лазером ударных волн в алюминии в цилиндрически-симметричной постановке 215

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ

в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
Телефон: +7 (383) 329-75-25
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

© Сибирское отделение РАН, 2023
© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2023

УДК 550.344.094.4

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД БАЙКАЛЬСКОЙ РИФТОВОЙ ЗОНЫ

© 2023 **М. С. Хайретдинов**[1,2a], **А. А. Михайлов**[1b], **В. В. Ковалевский**[1c], **Д. Л. Пинигина**[2d], **А. А. Якименко**[1,2e]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный технический университет, просп. К. Маркса 20, Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: [a]marat@opg.sscc.ru, [b]alex_mikh@omzg.sscc.ru, [c]kovalevsky@sscc.ru, [d]daria.pi789@gmail.com, [e]yakimenko@sscc.ru

Поступила в редакцию 24.10.2022 г.; после доработки 22.12.2022 г.; принята к публикации 12.01.2023 г.

На основе численного метода решения прямой и обратной задач разработана методика слежения за динамикой распространения сейсмо-гидроакустического волнового поля, построения синтетических сейсмограмм и оценивания скоростных характеристик сложнопостроенной геофизической структуры Байкальской рифтовой зоны на участке пос. Бабушкин (юго-восточная часть Байкала) — пос. Бугульдейка (северо-западная часть Байкала). Выбор профиля для моделирования обусловлен выполненными здесь экспериментальными работами силами Института физики Земли РАН, Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Института геологии СО РАН в 2021 г. Алгоритм решения прямой задачи восстановления волнового поля основан на применении интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Численная модель среды, используемая при расчётах распространения сейсмических волн, задавалась с учётом априорных данных о скоростном разрезе Байкальской рифтовой зоны, полученном рядом исследователей в районе по данным глубинного сейсмического зондирования Земли. Результаты прямого численного моделирования предполагают прогнозирование сложной структуры волнового поля и призваны для облегчения его интерпретации. В качестве подхода к решению обратной задачи восстановления скоростных характеристик неоднородной среды предложен и апробирован вычислительный сеточный алгоритм, основанный на вычислении средневзвешенных скоростей в участках сетки, накладываемой на поверхность земли. За счёт выбора шага сетки, метода аппроксимации дискретного годографа волн кубическими сплайнами, учёта кривизны годографа головных волн в областях с ярко выраженной неоднородностью строения среды удаётся определить скоростную характеристику с повышенной точностью. Показана согласованность восстановленной теоретической скоростной модели среды с экспериментально полученной моделью по методу глубинного сейсмического зондирования.

Ключевые слова: Байкальская рифтовая зона, численная модель, численное моделирование, волновое поле, синтетические сейсмограммы, сеточный алгоритм, скоростной разрез, сопоставительный анализ.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.215

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00861), госзадания № 0251_22_0004, проекта НГТУ № С22-26.

ВВЕДЕНИЕ

В проблеме мониторинга сейсмоактивной Байкальской рифтовой зоны (БРЗ) всё большую роль играют экологически чистые методы активного мониторинга сложнопостроенных структур как земной толщи БРЗ [1], так и водной толщи оз. Байкал [2]. Здесь перспективным высокоразрешающим и экологически чистым является метод вибрационного просвечивания Земли, позволяющий получать с высокой повторяемостью отклики среды в ответ на акты зондирования мощным вибрационным источником ЦВ-100 с амплитудой возмущающей силы 100 Тс [3]. Источник установлен на берегу Байкала в районе пос. Бабушкин.

Экспериментально получаемая пространственно-временная картина сейсмического волнового поля в земле и гидроакустического в воде как результат вибрационного зондирования имеет сложный характер для интерпретации. В этой ситуации для прогнозирования и улучшения интерпретации картины волновых полей большую роль играет численное моделирование процессов распространения волновых полей, рассчитываемых с учётом априорных данных по глубинным скоростным разрезам БРЗ.

На сегодня такие разрезы получены рядом отечественных и зарубежных исследователей с применением широкого спектра исследований — глубинного сейсмического зондирования Земли (ГСЗ), метода преломлённых волн (МПВ, КМПВ) и др. Обзор многолетних исследований в этой области представлен в работе [4]. К числу ранних работ по этому направлению относится работа [5] по глубинному сейсмическому исследованию БРЗ и построению её одномерной скоростной модели по Р-волнам. С применением метода глубинного сейсмического зондирования были уточнены обобщённые сейсмические границы и построены изолинии скорости в работе [6]. Структурные осадочные отложения под дном озера Байкал изучались последовательно во времени разными исследователями. В работе [7] из 4-х структурных этажей в строении земной коры в районе БРЗ выделяются осадочные отложения под дном оз. Байкал с толщиной, изменяющейся в диапазоне от 1.5 до 6.0 км и средней скоростью P-волн порядка 2.5 км/с. Исследования методом преломлённых волн (КМПВ) по изучению детального структурно-скоростного разреза осадочных отложений под дном оз. Байкал в районе его южной части были проведены в [8]. Как продолжение исследований в этом направлении являются работы датских учёных [9], где также рассмотрены свойства осадочных отложений под оз. Байкал, включая скоростной разрез среды по бортам озера на базе протяжённостью 350 км. Изучению глубинных структур БРЗ и, в частности, под дном оз. Байкал посвящены работы [10, 11], а также в разной степени названные выше работы [5–9].

Результаты приведённых геолого-геофизических исследований свидетельствуют о наличии под оз. Байкал мощного слоя осадочных отложений толщиной до 10 км, характеризуемых скоростями сейсмических волн от 1.48 до 5.25 км/с.

С учётом приведённых результатов в настоящей статье представлены численные методы моделирования волновых полей и восстановления скоростных характеристик неоднородных упругих сред Байкальской рифтовой зоны, основанные на решении прямых и обратных задач сейсмики. В качестве основы глубинного скоростного разреза при построении численной модели разреза в расчётах используется модель, разработанная в [10], как одна из последних.

1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЁТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Численная модель среды, используемая при расчётах распространения сейсмических волн, задавалась с учётом априорных данных о скоростном разрезе БРЗ, полученном по данным глубинного сейсмического зондирования [10]. Соответствующее графическое отображение численной модели среды приводится на рис. 1.

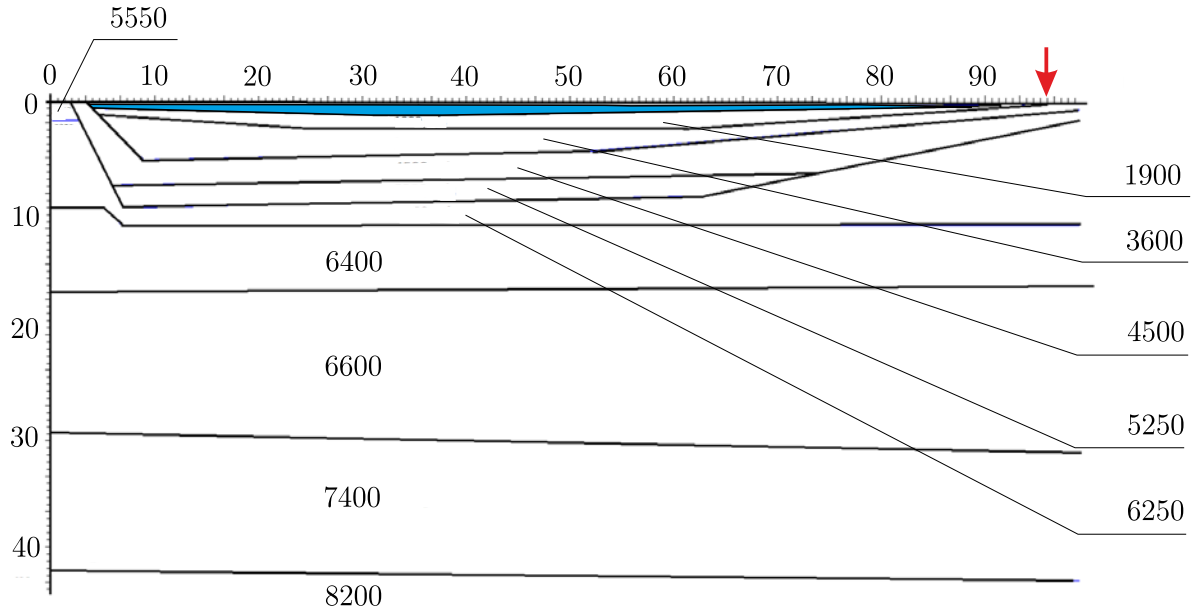

Рис. 1. Численная модель скоростного разреза БРЗ.
Подписаны значения скоростей продольных волн V_p (м/с) в граничных слоях;
водяной слой выделен голубым цветом

Значения поперечных волн задавались по формуле $V_s = V_p/\sqrt{3}$. Плотность рассчитывалась по известной формуле Гарднера $\rho = 1,74\,V_p^{0,25}$. Физические характеристики слоя воды: скорость продольной волны $V_p = 1480$ м/с, плотность $\rho = 1,0$ г/см^3. При расчётах задавалась ограниченная по пространству область размерностью $(x, z) = (90, 45)$ км. Для подавления отражения волн на границах, ограничивающих заданную область, был использован способ ограничения расчётной области идеально поглощающими PML-слоями (Perfectly Matched Layers). Этот подход предложен для численных расчётов упругих волновых полей в работах [11, 12].

Алгоритм решения задачи основан на применении интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Алгоритм решения задачи по времени с помощью интегральных преобразований Лагерра можно рассматривать как аналог интегрального преобразования Фурье [13, 14]. В отличие от последнего применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Кроме того, введение параметра сдвига по временной переменной позволяет существенно уменьшить обусловленность получаемой системы уравнений. Эти основные преимущества алгоритма после конечно-разностной аппроксимации уравнений по вертикальной пространственной переменной дают возможность свести решение исходной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений для некоторого набора правых частей с хорошо обусловленной матрицей, не зависящей от параметра разделения. Это позволяет воспользоваться итерационными методами типа сопряжённых градиентов, сходящихся за несколько итераций из-за хорошей обусловленности редуцированной задачи [15].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Связь между компонентами напряжений и скоростями смещений в декартовой системе координат (x, z) для задачи распространения сейсмоакустических колебаний в упругой

изотропной среде записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right) + F_x(x,z)f(t),\\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) + F_z(x,z)f(t),\\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x},\\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z},\\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial x}\right).\end{gathered} \tag{1}$$

В этих уравнениях (u_x, u_z) — компоненты скорости смещения, $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ — компоненты тензора напряжений, $\rho(x,z)$ — плотность среды, $\lambda(x,z)$ и $\mu(x,z)$ — коэффициенты Ламе; F_x, F_z — составляющие силы $\mathbf{F}(x,z) = F_x\mathbf{e}_x + F_z\mathbf{e}_z$, описывающей распределение локализованного в пространстве источника. В зависимости от типа моделируемого источника, F_x, F_z будут иметь следующие значения:

1) для источника вертикальной силы $F_x = 0$, $F_z = \delta(x-x_0)\delta(z-z_0)$;

2) для центра давления $F_x = \dfrac{\partial(x-x_0)}{\partial x}\partial(z-z_0)$, $F_z = \partial(x-x_0)\dfrac{\partial(z-z_0)}{\partial z}$;

$f(t)$ — моделируемый временной сигнал в источнике с координатами (x_0, z_0). Задача решается при нулевых начальных данных:

$$u_x|_{t=0} = u_z|_{t=0} = \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{zz}|_{t=0} = \sigma_{xz}|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Решение рассматривается на полупространстве $z \geqslant 0$ с граничными условиями на свободной поверхности:

$$\sigma_{xz}(x,z,t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(x,z,t)|_{z=0} = 0. \tag{3}$$

Полагаем параметры среды $\rho(x,z)$, $\lambda(x,z)$, $\mu(x,z)$ кусочно-непрерывными функциями переменных (x,z).

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

На первом этапе к задаче (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени. Для некоторой функции $F(t)$ интегральное преобразование Лагерра определяется как

$$F^m = \int_0^\infty F(t)(ht)^{-\alpha/2}\, l_m^\alpha(ht)\, d(ht) \tag{4}$$

с формулами обращения

$$F(t) = (ht)^{\alpha/2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m!}{(m+\alpha)!}F^p l_m^\alpha(ht), \tag{5}$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — ортонормированные функции Лагерра:

$$\int_0^\infty l_m^\alpha(ht) l_n^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{mn}\frac{(m+\alpha)!}{m!}.$$

Функции Лагерра $l_m^\alpha(ht)$ выражаются через классические стандартизованные многочлены Лагерра $L_m^\alpha(ht)$. Выбираем параметр α целым и положительным, тогда

$$l_m^\alpha(ht) = (ht)^{\alpha/2} e^{-ht/2} L_m^\alpha(ht).$$

В результате данного преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2}u_x^m &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{xx}^m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^m}{\partial z}\right) - h\sum_{j=0}^{m-1}\left(u_x^j\right)^j,\\
\frac{h}{2}u_z^m &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^m}{\partial z}\right) - h\sum_{j=0}^{m-1}\left(u_z^j\right)^j,\\
\frac{h}{2}\sigma_{zz}^m &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z^m}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_x^m}{\partial x} - h\sum_{j=0}^{j-1}\sigma_{zz}^j,\\
\frac{h}{2}\sigma_{xx}^m &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x^m}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_z^m}{\partial z} - h\sum_{j=0}^{j-1}\sigma_{xx}^j,\\
\frac{h}{2}\sigma_{xz}^m &= \mu\left(\frac{\partial u_x^m}{\partial z} + \frac{\partial u_z^m}{\partial x}\right) - h\sum_{j=0}^{j-1}\sigma_{xz}^j,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$u_x^m|_{t=0} = u_z^m|_{t=0} = \sigma_{xx}^m|_{t=0} = \sigma_{zz}^m|_{t=0} = \sigma_{xz}^m|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Для решения приведённой задачи воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на сдвинутых сетках с четвёртым порядком точности [16]. Для этого в расчётной области введём в направлении координаты z сетки ωz_1 и $\omega z_{1/2}$ с шагом дискретизации Δz, сдвинутые относительно друг друга на $\Delta z/2$:

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = (x, j\Delta z + \Delta z/2, t), \quad j = 0, \ldots, M.$$

Аналогично, введём в направлении координаты x сетки ωx_1 и $\omega x_{1/2}$ с шагом дискретизации Δx, сдвинутые относительно друг друга на $\Delta x/2$:

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = (i\Delta x + \Delta x/2, z, t), \quad i = 0, \ldots, N.$$

На данных сетках введём операторы дифференцирования D_x и D_z, аппроксимирующие производные $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}$ с четвёртым порядком точности по координатам $z = x_1$ и $x = x_2$:

$$\begin{aligned}
D_x u(x,z) = \frac{9}{8\Delta x}&[u(x+\Delta x/2, z) - u(x-\Delta x/2, z)]\\
&- \frac{1}{24\Delta x}[u(x+3\Delta x/2, z) - u(x-3\Delta x/2, z)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z u(x,z) = \frac{9}{8\Delta x}&[u(x, z+\Delta z/2) - u(x, z-\Delta z/2)]\\
&- \frac{1}{24\Delta x}[u(x, z+3\Delta z/2) - u(x, z-3\Delta z/2)].
\end{aligned}$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$u_x^m(x,z) \in \omega x_1 \times \omega z_1, \quad u_z^m(x,z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2},$$
$$\sigma_{xx}^m(x,z), \sigma_{zz}^m(x,z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \quad \sigma_{xz}^m(x,z) \in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}.$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6), (7) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения $\mathbf{W}$ в следующем виде:

$$\mathbf{W}(m) = (\mathbf{V}_0(m), \mathbf{V}_1(m), \ldots, \mathbf{V}_{M+N}(m))^T,$$
$$\mathbf{V}_{i+j} = \left(u_x^{i,j}, u_z^{i+1/2,j+1/2}, \sigma_{xx}^{i+1/2,j}, \sigma_{zz}^{i+1/2,j}, \sigma_{xz}^{i,j+1/2}\right)^T.$$

Тогда данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2}E\right)\mathbf{W}(m) = \mathbf{F}_\Delta(m-1).$$

В результате матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряжённых градиентов. На уровне входных данных при задании модели среды это равносильно декомпозиции исходной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Это даёт возможность распределения памяти как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для моделирования по Байкальскому профилю использовался двухмерный случай постановки задачи в плоскости (x, z). Моделировалось волновое поле от локального источника типа вертикальная сила. В этом случае компоненты распределения источника в пространстве для системы уравнений (1) задавались как $F_x = 0$, $F_z = \delta(x - x_0)(z - z_0)$. Временной сигнал в источнике задавался в волновом поле в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right)\sin(2\pi f_0(t-t_0)), \tag{8}$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 8\,\text{Гц}$, $t_0 = 0,125\,\text{с}$.

При этом моделируется волновое поле от точечного источника типа вертикальная сила, расположенного на поверхности с координатой $x_0 = 88\,\text{км}$ по оси Ox (местоположение показано стрелкой на рис. 1). По отношению к заданной модели среды (рис. 1) изложенная методика расчёта позволяет отслеживать развитие во времени картины распространения волнового поля от источника по горизонтали и глубине. В качестве примера на рис. 2 приведён мгновенный снимок волнового поля U_z-компоненты для момента времени $T = 15\,\text{с}$. Рисунок наглядно показывает распространение волновых фронтов колебаний в выбранных координатах.

По результатам расчётов получены синтетические сейсмотрассы, характеризующие расположение волновых откликов в координатах время-расстояние, где расстояние отсчитывается от источника по горизонтали. В качестве примера на рис. 3, 4 представлены синтетические сейсмотрассы для P- и U_z-компонент волнового поля в диапазоне дальностей 76,5–86 км.

Приёмники для записи сейсмотрасс P-компоненты располагались на глубине $z = 20$ метров, а для U_z-компоненты — на поверхности. Значения для P-компоненты вычислялись по

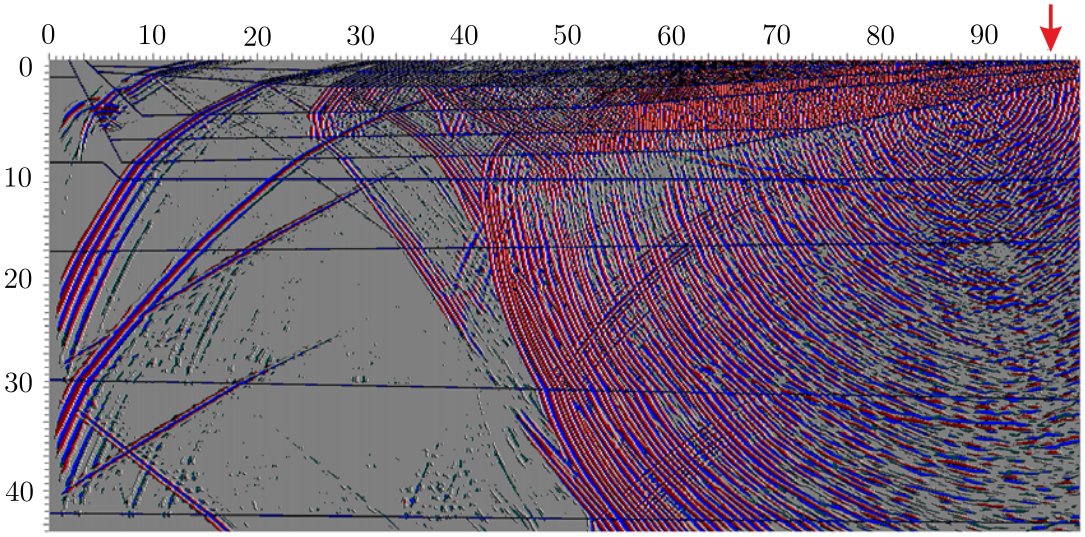

Рис. 2. Мгновенный снимок волнового поля U_z-компоненты для $T = 15$ с

значениям нормальных компонент тензора напряжения по формуле $P = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{zz}^2}$. Координата первого приёмника $x_1 = 2$ км. Интервал между приёмниками по оси Ox составляет $\Delta x = 500$ метров. Первые три приёмника расположены на суше, а остальные — в воде. Приведённые параметры расстановки для численного эксперимента соответствуют тем, что были реализованы в реальном эксперименте в юго-восточной части Байкала на трассе пос. Бабушкин—пос. Бугульдейка.

Приведённые рисунки отражают сложную многоволновую структуру сейсмического поля. На основе полученных волновых откликов оцениваются времена вступления волн, которые в дальнейшем используются для расчёта скоростных характеристик среды по глубине. Алгоритм расчёта рассматривается ниже.

5. АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОПОСТРОЕННОЙ СРЕДЫ

Задача восстановления скоростной характеристики среды по сути своей является обратной задачей, заключающейся в построении скоростного разреза на основе измеренных времён вступлений волн, образующих скоростной годограф в виде некоторой интегральной функции.

Решение задачи восстановления связано с построением теоретического годографа с помощью решения нелинейной системы условных уравнений вида

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\eta}(X, \theta) + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ — вектор времён вступлений сейсмических волн, $\boldsymbol{\eta}(X, \theta)$ — N-мерный вектор вычисляемых времён пробега (теоретический годограф) или функция регрессии, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)^T$ — вектор ошибок, $\boldsymbol{\theta} = [(x^*, y^*), \mathbf{v}]^T$, где (x^*, y^*) — координаты точки излучения, $\mathbf{v}$ — вектор локальных скоростей сейсмических волн; $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)$ — матрица координат датчиков, N — число датчиков. При известных (x^*, y^*) в качестве оцениваемых параметров выступают локальные скорости сейсмических волн $\mathbf{v}$.

Такая задача является типичной в геофизике, и существует множество подходов к её решению, основанных на минимизации невязки между экспериментальным и теоретическим годографами методом наименьших квадратов [17, 18]:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} Q(\boldsymbol{\theta}), \quad Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} {\sigma_i}^{-2} (t_i - \eta(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}))^2. \tag{10}$$

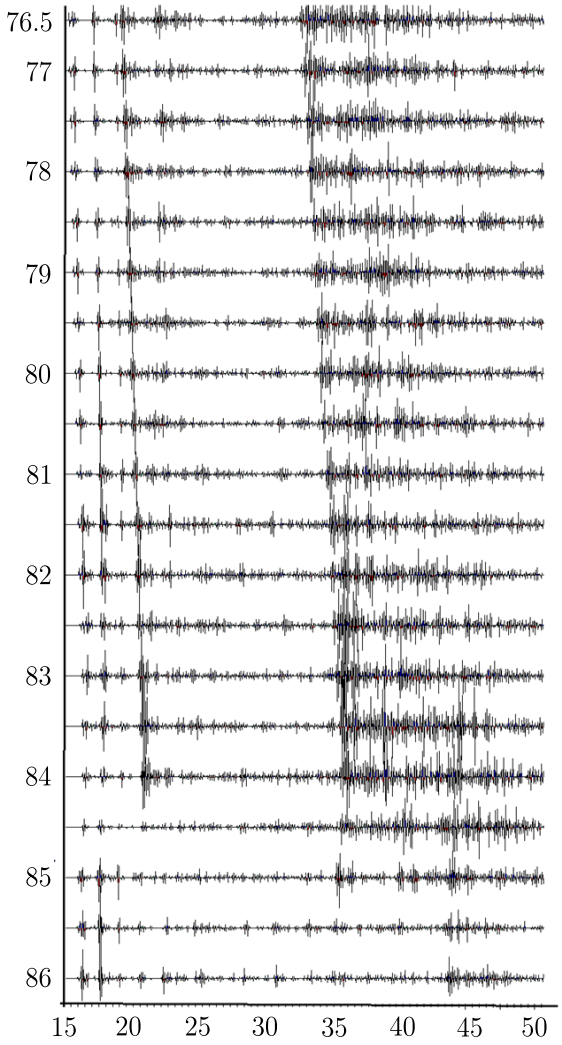

Рис. 3. Сейсмотрассы: P-компонента

Из-за большой размерности параметров в виде $\mathbf{t}$ и $\mathbf{v}$ применение строгих методов решения обратной задачи часто осложнено. В этом случае можно прибегнуть к использованию эвристического алгоритма при сохранении допустимой точности решения. В частности, такой подход возникает в задачах имитационного моделирования, для которых нужно проводить множество испытаний с целью установления связи между выбираемыми параметрами $\mathbf{v}$ и получаемым результатом в (9). Ниже рассматривается подход к восстановлению скоростей с применением сеточного метода с адаптивным выбором шага сетки. При этом подразумевается уточнение расчётов скоростей в областях с наиболее выраженной гетерогенностью.

Идея подхода состоит в том, что исследуемая область разбивается на участки [19], в которых вычисляются локальные скорости:

$$v_k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} V_{ij}\,\frac{L_{ijk}}{L_{ij}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \frac{L_{ijk}}{L_{ij}}, \quad i = 1,\ldots,N, \quad j = 1,\ldots,M, \tag{11}$$

где V_{ij} — средняя скорость сейсмической волны от источника i до датчика j; N — число источников; M — число регистрирующих датчиков на линейном профиле; L_{ij} — расстояние, пройденное сейсмической волной от источника i до датчика j; L_{ijk} — расстояние, пройденное

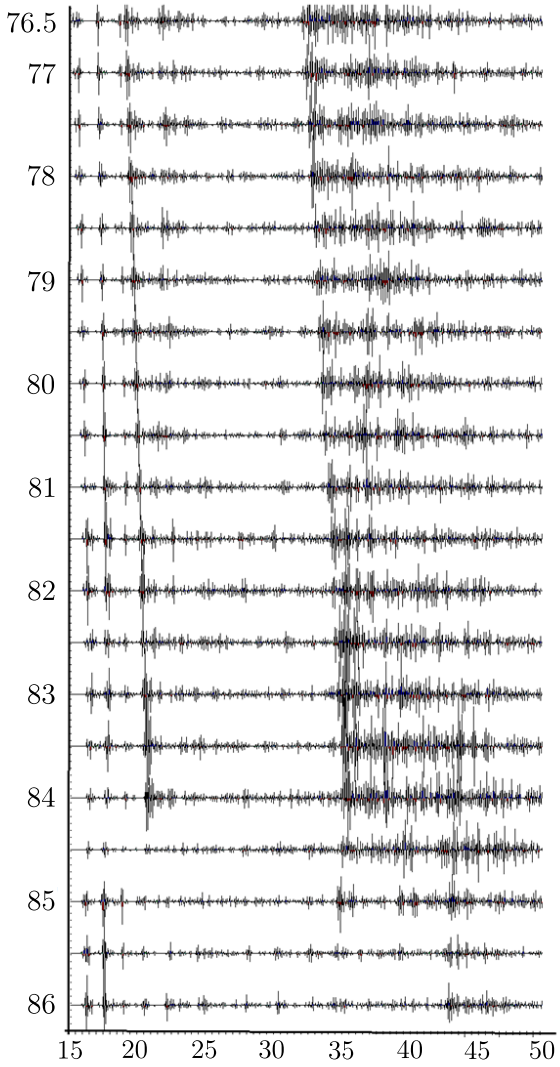

Рис. 4. Сейсмотрассы: U_z-компонента

сейсмической волной от источника i до датчика j в k-м участке. Таким образом, на всю исследуемую область накладывается сетка, узлами которой являются k-е участки. Минимальный шаг сетки ограничивается верхней граничной частотой колебаний источника. Рис. 5 поясняет методику определения средневзвешенной скорости сейсмической волны.

На рис. 5(a) представлена схема вибрационного зондирования изучаемой среды, в данном случае области грязевого вулкана Карабетова гора (Таманская грязевулканическая провинция). На схеме пятью звёздочками помечены места последовательной установки источника (сейсмического вибратора), кружками — места размещения 37 датчиков на линейном профиле с шагом 50 м; область самого вулкана помечена кругом; показана сетка, наложенная на дневную поверхность земли для определения средневзвешенной скорости сейсмической волны на выбранном участке в соответствии с (11). На рис. 5(b) обозначены в цвете и количественно представлены результаты определения средневзвешенной скорости на участках среды соответствующей цветности.

Очевидно, что рассматриваемый метод даёт удовлетворительное приближение по точности к скоростным оценкам при условиях прямолинейности пути волны в направлении источник-приёмник и разумного выбора шага сетки. Первое справедливо для проходящих волн. Выбор последнего определяется кривизной нелинейного годографа, что требует выбора

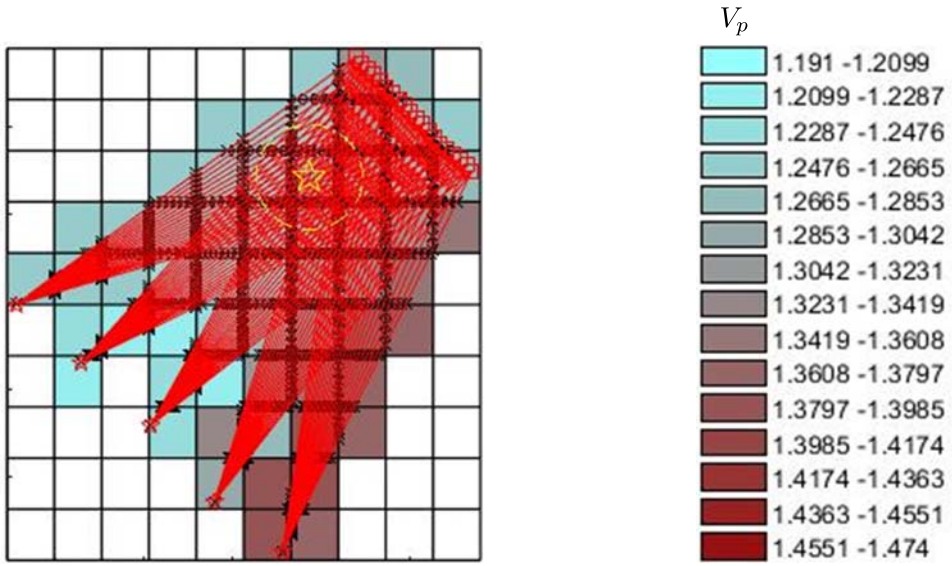

Рис. 5. Схема зондирования области грязевого вулкана и оценки скоростей продольных волн в среде; звёздочками помечены места установки источника, кружками — места размещения датчиков на линейном профиле, область самого вулкана помечена кругом; (a) сетка, наложенная на дневную поверхность земли для определения средневзвешенной скорости сейсмической волны на выбранном участке; (b) результаты представления средневзвешенной скорости

адаптивного шага сетки. Поскольку нелинейный годограф представляется набором N дискретных значений времени, то возникает задача интерполяции его непрерывной функцией времени. В качестве интерполирующей функции используются кубические сплайны. Как известно, на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_i(x)$ является кубическим многочленом вида

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (12)$$

при условии непрерывности со своими производными вплоть до второго порядка. Использование такого интерполянта определяется тем, что гарантированно выполняется условие равенства значений интерполирующей функции в N узлах с заданными дискретными значениями функции годографа F_i: $S_3(x_i) = F_i$, $i = 1, \ldots, N$. Для поиска неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i используются следующие условия:

1. Интерполяции функции $S_i(x_i) = F_i$.
2. Непрерывности функции $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$.
3. Непрерывности первой производной функции $S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i)$.
4. Непрерывности второй производной функции $S_i''(x_i) = S_{i-1}''(x_i)$. На концах годографа принимается $S_1''(x_0) = 0$, $S_N''(x_N) = 0$.

Таким образом, возникает необходимость решения $4N$ алгебраических уравнений для восстановления непрерывной функции годографа по набору дискретных значений времён вступлений головных волн на сейсмограммах, получаемых от каждого датчика (рис. 5). В каждом конкретном случае решение будет соотноситься с решением прямой задачи для выбранной численной скоростной модели среды либо по набору экспериментально измеренных времён вступлений волн. Точность восстановления оценивается критерием (10). Пример восстановления скоростей волн приводится ниже.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОЦЕНИВАНИЮ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОПОСТРОЕННОЙ СРЕДЫ В БАЙКАЛЬСКОЙ РИФТОВОЙ ЗОНЕ

По отношению к синтетическим сейсмограммам для P-компоненты (рис. 3), соотнесённым к численной модели (рис. 1) в соответствии с алгоритмами (11), (12), восстановлены скоростные характеристики среды в диапазоне дальностей 76–90 км. Годограф в этом диапазоне по своему характеру представляется тремя графиками, описываемыми уравнениями

$$f = \begin{cases} c_1(x-x_1)+d_1, & x \in [76,5\ldots 83]\,\text{км}, \\ a_2(x-x_1)^3+b_2(x-x_1)^2+c_2(x-x_1)+d_2, & x \in [83\ldots 85]\,\text{км}, \\ a_3(x-x_1)^3+b_3(x-x_1)^2+c_3(x-x_1)+d_3, & x \in [85\ldots 86]\,\text{км}. \end{cases} \tag{13}$$

Шаг интерполяции составляет 0,1 км в диапазонах расстояний, указанных в квадратных скобках справа от уравнений. В качестве примера результатов расчётов в таблице приводятся значения коэффициентов для 2-го уравнения кубического сплайна, охватывающего участок 83–85 км.

№	$x-x_1$		a_2	b_2	c_2	d_2
1	83	83,1	0,166667	−0,5000000000	0,098333	16,53
2	83,1	83,2	0,166667	−0,4500000000	0,003333	16,535
3	83,2	83,3	0,166667	−0,4000000000	−0,08167	16,531
4	83,3	83,4	0,166667	−0,3500000000	−0,15667	16,519
5	83,4	83,5	0,166667	−0,3000000000	−0,22167	16,5
6	83,5	83,6	0,166667	−0,2500000000	−0,27667	16,475
7	83,6	83,7	0,166667	−0,2000000000	−0,32167	16,445
8	83,7	83,8	0,166667	−0,1500000000	−0,35667	16,411
9	83,8	83,9	0,166667	−0,1000000000	−0,38167	16,374
10	83,9	84	0,166667	−0,0500000000003	−0,39667	16,335
11	84	84,1	−0,03333	0,0000000000	−0,40167	16,295
12	84,1	84,2	−0,03333	−0,0100000000	−0,40267	16,2548
13	84,2	84,3	−0,03333	−0,0200000000	−0,40567	16,2144
14	84,3	84,4	−0,03333	−0,0300000000	−0,41067	16,1736
15	84,4	84,5	−0,03333	−0,0400000000	−0,41767	16,1322
16	84,5	84,6	−0,03333	−0,0500000000	−0,42667	16,09
17	84,6	84,7	−0,03333	−0,0600000000	−0,43767	16,0468
18	84,7	84,8	−0,03333	−0,0700000000	−0,45067	16,0024
19	84,8	84,9	−0,03333	−0,0800000000	−0,46567	15,9566
20	84,9	85	−0,03333	−0,0900000000	−0,48267	15,9092

На рис. 6(a) представлены гистограммы средневзвешенных скоростей V_p (11) в локализованных диапазонах дальностей источник-приёмник, указанных на оси абцисс. Как следует из графиков, в диапазоне дальностей зондирования 76–90 км скорости лежат в пределах 4,97–5,38 км/с. Полученные оценки численного моделирования согласуются с обобщёнными данными по скоростям (рис. 6(b)), полученными ранее в натурных экспериментах по глубинному сейсмическому зондированию БРЗ [4].

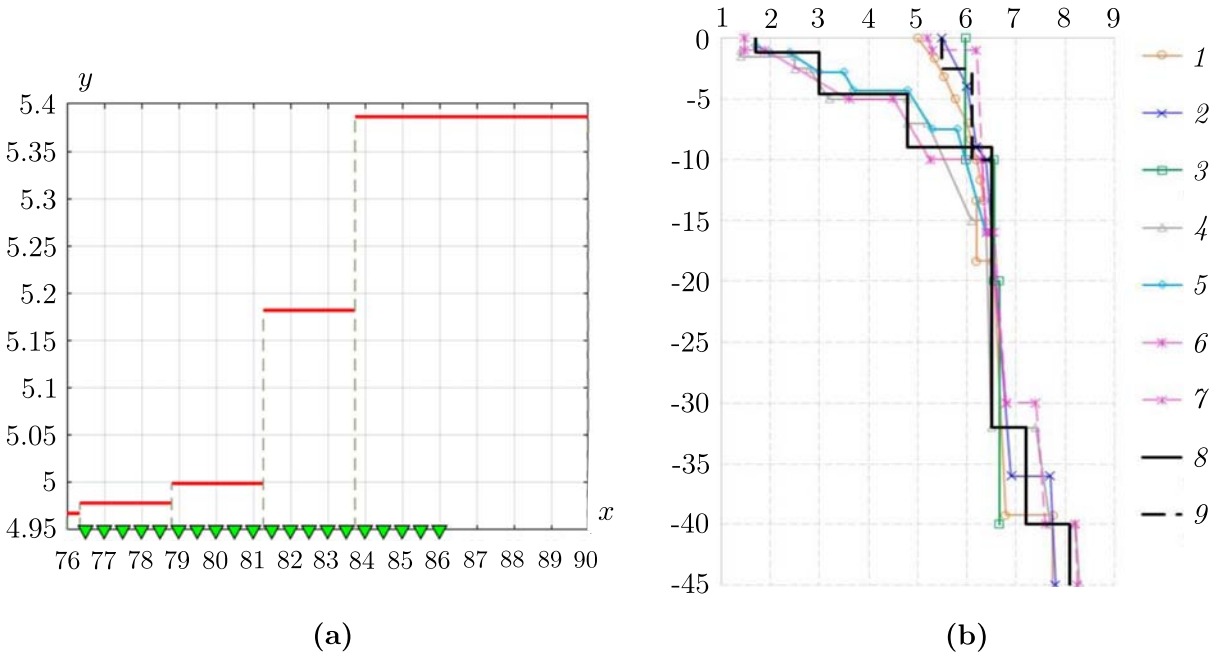

Рис. 6. Гистограммы скоростей волн:
(a) гистограмма восстановленных скоростей волн V_p как функция дальности:
x — положение датчиков относительно начала координат (км),
y — скорости сейсмических волн (км/с);
(b) обобщённые данные по скоростям, полученным в натурных экспериментах
по глубинному сейсмическому зондированию БРЗ [4]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан подход к численному моделированию распространения сейсмо-гидроакустического волнового поля в сопряжённых средах земля-вода. Подход основывается на применении методов прямого и обратного численного моделирования и реализован при расчёте скоростных характеристик среды в юго-восточной части оз. Байкал. Выбор района обусловлен необходимостью дополнения полученных здесь результатов полевых исследований, выполненных совместными усилиями ИФЗ РАН, ИВМиМГ СО РАН, ГИН СО РАН по программе мониторинга смежных сред земля-вода-лёд-атмосфера. Разработанный подход распадается на этапы.

1. Прямое моделирование, когда по численной модели скоростного разреза среды рассчитываются мгновенные снимки волновых полей и синтетические сейсмограммы. На основе последних получаются картины распределения волн по времени и пространству. Из сопоставления результатов численного моделирования и полевых экспериментов вытекает принципиальный вывод о том, что в воде присутствуют гидроакустические волны, порождаемые скоростными (около 5,35 км/с) сейсмическими волнами на границе дно-вода. Это подтверждает априорное теоретическое заключение о наличии сейсмо-гидроакустической трансформации волн, имеющей важное научное и практическое значение.

2. Решение обратной задачи восстановления скоростных характеристик неоднородной среды на основе предложенного и апробированного сеточного метода, основанного на вычислении средневзвешенных скоростей волн в участках сетки, накладываемой на поверхность Земли. За счёт выбора шага сетки, метода аппроксимации дискретного годографа волн кубическими сплайнами, учёта кривизны годографа головных волн в областях с ярко выраженной неоднородностью строения среды удаётся определить скоростную характеристику с повышенной

точностью. На примере численного оценивания скоростного разреза в выбранном районе исследований показано хорошее согласие восстановленной теоретической скоростной модели среды с экспериментально полученной моделью по методу ГСЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kovalevsky V.V., Fatyanov A.G., Karavaev D.A., Braginskaya L.P., Grigoryuk A.P., Mordvinova V.V., Tubanov Ts.A., Bazarov A.D.* Research and verification of the Earth's crust velocity models by mathematical simulation and active seismology methods // Geodynamics & Tectonophysics. 2019. V. 10, N 3. P. 569–583.
2. *Макаров М.М., Кучер К.М., Попов О.Е., Асламов И.А., Гранин Н.Г.* Экспериментальные исследования распространения тонально-импульсных сигналов в воде озера Байкал // Журн. приклад. и фунд. исследований. 2018. № 7. С. 54–60.
3. *Алексеев А.С., Глинский Б.М., Ковалевский В.В., Хайретдинов М.С. и др.* Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками. Новосибирск: Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2004.
4. *Беляшев А.В., Тубанов Ц.А.* Подбор скоростных моделей для локализации сейсмических событий в пределах Байкальской рифтовой зоны // Геофиз. технологии. 2021. № 1. С. 38–51.
5. *Puzyrev N.N., Mandelbaum M.M., Krylov S.V., Mishenkin B.P., Krupskaya G.V., Petrick G.V.* Deep seismic investigations in the Baikal rift zone // Tectonophysics. 1973. V. 20, N 1. P. 85–95; DOI: 10.1016/0040-1951(73)90098-X
6. *Сун Юншен С., Крылов С.В., Баоцзюнь Я. и др.* Глубинное сейсмическое зондирование литосферы на международном трансекте Байкал-Северо-Восточный Китай // Геология и геофизика. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–15.
7. *Ten BrinkU.S., Taylor M.H.* Crustal structure of central Lake Baikal: Insight into intracontinental rifting // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, N B3. P. 21–33; DOI: 10.1029/2002JB001880
8. *Суворов В.Д., Мишенькина З.Р.* Структура осадочных отложений и фундамента под южной котловиной озера Байкал по данным КМПВ // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 11. С. 1159–1167.
9. *Nielsen C., Thybo H.* Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidens from full-waveform modeling of wide-angle siesmic data // Tectonophysics. 2009. V. 470, N 3-4. P. 298–318; DOI: 10.1016/j.t cto.2009.01.023
10. *Мордвинова В.В., Артемьев А.А.* Трёхмерная модель юга Байкальской рифтовой зоны и сопредельных территорий по обменным волнам // Геология и геофизика. 2010. Т. 51, № 6. С. 887–904.
11. *Collino F.* Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations // J. Comput. Phys. 1996. V. 131, N 1. P. 164–180.
12. *Collino F., Tsogka C.* Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. 2001. V. 66, N 1. P. 294–307.
13. *Mikhailenko B.G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Lett. 1999. V. 12, N 4. P. 105–110.
14. *Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. Comput. Acoustics. 2001. V. 9, N 4. P. 1523–1541; DOI: 10.1142/S0218396X01001339
15. *Paige C.C., Saunders M.A.* LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. Math. Software. 1982. V. 8, N 1. P. 43–71.
16. *Levander A.R.* Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // Proc. 57-th SEG Annual Meeting. New Orleans, 1987. P. 234–245.
17. *Гольдин С.В.* Интерпретация данных сейсмического метода отражённых волн. М.: Недра, 1979.
18. *Кутьина О.Г.* Построение статистических алгоритмов обработки и интерпретации сейсмических данных. М.: Недра, 1982.
19. *Тагиров Х.Ю., Асланов Т.Г., Магомедов Х.Д.* Определение средневзвешенной скорости сейсмической волны на участках Земли по пути её распространения // Изв. Дагестан. гос. пед. ун-та. Естественные и точные науки. 2017. Т. 11, № 3. С. 108–114.

UDC 550.344.094.4

NUMERICAL ANALYTIC METHODS FOR CALCULATING WAVE FIELDS AND RESTORING THE VELOCITY CHARACTERISTICS OF INHOMOGENEOUS ELASTIC MEDIA IN THE BAIKAL RIFT ZONE

© 2023 **M. S. Khairetdinov**[1,2a], **A. A. Mikhailov**[1b], **V. V. Kovalevsky**[1c], **D. L. Pinigina**[2d], **A. A. Yakimenko**[1,2e]

[1]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State Technical University, pr. K. Marksa 20, Novosibirsk 630073, Russia*

E-mails: [a]marat@opg.sscc.ru, [b]alex_mikh@omzg.sscc.ru, [c]kovalevsky@sscc.ru, [d]daria.pi789@gmail.com, [e]yakimenko@sscc.ru

Received 24.10.2022, revised 22.12.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. On the basis of a numerical method for solving direct and inverse problems, a method has been developed for tracking the dynamics of the propagation of a seismo-hydroacoustic wave field, constructing model seismograms, and estimating the velocity characteristics of the complex geophysical structure of the Baikal rift zone in the area of the village Babushkin (southeastern Baikal) - the village. Buguldeika (north-western Baikal). The choice of the profile for modeling is due to the experimental work performed here by the Institute of Physics of the Earth Russian Academy of Sciences, the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, the Institute of Geology of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences in 2021. The algorithm for solving the direct problem of wave field reconstruction is based on the application of the integral Laguerre transformation in time and finite-difference approximation in spatial coordinates. The numerical model of the medium used to calculate the propagation of seismic waves was set taking into account a priori data on the velocity section of the Baikal rift zone, obtained by a number of researchers in the region according to the data of deep seismic sounding of the Earth. The results of direct numerical modeling assume the prediction of the complex structure of the wave field and are intended to facilitate its interpretation. As an approach to solving the inverse problem of restoring the velocity characteristics of an inhomogeneous media, a computational grid algorithm based on the calculation of weighted average velocities in sections of a grid superimposed on the Earth's surface is proposed and tested. By choosing the grid step, the method of approximating the discrete wave travel time curve by cubic splines, and taking into account the curvature of the head wave travel time curve in areas with a pronounced inhomogeneity of the medium structure, it is possible to determine the velocity characteristic with increased accuracy. The consistency of the reconstructed theoretical velocity model of the medium with the experimentally obtained model by the method of deep seismic sounding is shown.

Keywords: Baikal rift zone, numerical model, numerical modeling, wave field, model seismograms, grid algorithm, velocity profile, comparative analysis.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.215

REFERENCES

1. Kovalevsky V.V., Fatyanov A.G., Karavaev D.A., Braginskaya L.P., Grigoryuk A.P., Mordvinova V.V., Tubanov Ts.A., Bazarov A.D. Research and verification of the Earth's crust velocity models by

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2.

mathematical simulation and active seismology methods. *Geodynamics & Tectonophysics*, 2019, Vol. 10, No. 3, pp. 569–583.

2. Makarov M.M., Kucher K.M., Popov O.E., Aslamov I.A., Granin N.G. Eksperimental'nye issledovaniya rasprostraneniya tonal'no-impul'snykh signalov v vode ozera Baikal [Experimental studies of the propagation of tone-pulse signals in the water of Lake Baikal]. *Zhurn. Priklad. i Fund. Issled.*, 2018, No. 7, pp. 54–60 (in Russian).
3. Alekseev A.S., Glinskii B.M., Kovalevskii V.V., Khairetdinov M.S. i dr. Aktivnaya seismologiya s moshchnymi vibratsionnymi istochnikami [Active seismology with powerful vibration sources]. Novosibirsk: Filial «Geo» Izd-va SO RAN, 2004 (in Russian).
4. Belyashev A.V., Tubanov Ts.A. Podbor skorostnykh modelei dlya lokalizatsii seismicheskikh sobytii v predelakh Baikal'skoi riftovoi zony [Selection of high-speed models for localization of seismic events within the Baikal Rift zone]. *Geofiz. Tekhnol.*, 2021, No. 1, pp. 38–51 (in Russian).
5. Puzyrev N.N., Mandelbaum M.M., Krylov S.V., Mishenkin B.P., Krupskaya G.V., Petrick G.V. Deep seismic investigations in the Baikal rift zone. *Tectonophysics*, 1973, Vol. 20, No. 1, pp. 85–95; DOI: 10.1016/0040-1951(73)90098-X
6. Sun Yunshen S., Krylov S.V., Baotszyun' Ya. i dr. Glubinnoe seismicheskoe zondirovanie litosfery na mezhdunarodnom transekte Baikal-Severo-Vostochnyi Kitai [Deep seismic sounding of the lithosphere on the Baikal-Northeast China international transect]. *Geologiya i Geofiz.*, 1996, Vol. 37, No. 2, pp. 3–15 (in Russian).
7. Ten BrinkU.S., Taylor M.H. Crustal structure of central Lake Baikal: Insight into intracontinental rifting. *J. Geophys. Res.*, 2003, Vol. 108, No. B3, pp. 21–33; DOI: 10.1029/2002JB001880
8. Suvorov V.D., Mishen'kina Z.R. Struktura osadochnykh otlozhenii i fundamenta pod yuzhnoi kotlovinoi ozera Baikal po dannym KMPV [The structure of sedimentary deposits and the foundation under the southern basin of Lake Baikal according to KMPV]. *Geologiya i Geofiz.*, 2005, Vol. 46, No. 11, pp. 1159–1167 (in Russian).
9. Nielsen C., Thybo H. Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidens from full-waveform modeling of wide-angle siesmic data. *Tectonophysics*, 2009, Vol. 470, No. 3-4, pp. 298–318; DOI: 10.1016/j.t cto.2009.01.023
10. Mordvinova V.V., Artem'ev A.A. Trekhmernaya model' yuga Baikal'skoi riftovoi zony i sopredel'nykh territorii po obmennym volnam [Three-dimensional model of the south of the Baikal rift zone and adjacent territories by exchange waves]. *Geologiya i Geofiz.*, 2010, Vol. 51, No. 6, pp. 887–904 (in Russian).
11. Collino F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. Comput. Phys.*, 1996, Vol. 131, No. 1, pp. 164–180.
12. Collino F., Tsogka C. Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 2001, Vol. 66, No. 1, pp. 294–307.
13. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems. *Appl. Math. Lett.*, 1999, Vol. 12, No. 4, pp. 105–110.
14. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling. *J. Comput. Acoustics*, 2001, Vol. 9, No. 4, pp. 1523–1541; DOI: 10.1142/S0218396X01001339
15. Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans. Math. Software*, 1982, Vol. 8, No. 1, pp. 43–71.
16. Levander A.R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme. *Proc. 57-th SEG Annual Meeting.* New Orleans, 1987, pp. 234–245.
17. Gol'din S.V. Interpretatsiya dannykh seismicheskogo metoda otrazhennykh voln [Interpretation of the data of the seismic method of reflected waves]. Moscow: Nedra, 1979 (in Russian).
18. Kut'ina O.G. Postroenie statisticheskikh algoritmov obrabotki i interpretatsii seismicheskikh dannykh [Construction of statistical algorithms for processing and interpretation of seismic data]. Moscow: Nedra, 1982 (in Russian).

19. Tagirov Kh.Yu., Aslanov T.G., Magomedov Kh.D. Opredelenie srednevzveshennoi skorosti seismicheskoi volny na uchastkakh Zemli po puti ee rasprostraneniya [Determination of the weighted average velocity of a seismic wave on Land along the path of its propagation]. *Izv. Dagestan. Gos. Ped. Univ. Estestvennye i Tochnye Nauki*, 2017, Vol. 11, No. 3, pp. 108–114.