

УДК 550.311, 550.344

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРЕДВЕСТНИКОВ *PKP*-ВОЛН В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛЕ

А. Г. Фатьянов<sup>1</sup>, В. Ю. Бурмин<sup>2,\*</sup>

Представлено академиком РАН А. О. Глико 14.02.2019 г.

Поступило 19.02.2019 г.

В настоящее время активно развиваются конечно-разностные методы для расчёта волновых полей в Земле. Но, как правило, исследователям не удаётся рассчитать сейсмограммы длительностью более 20 мин даже на суперкомпьютере. Существуют расчёты для радиально-симметричной непрерывной сферической модели Земли, и “предвестники” при этом не обнаруживаются. Обнаружена только дифракция волн на границе: внешнее—внутреннее ядро. Эта дифракция незначительна и не может описать появления “предвестников” *PKP*-волн. В случае слоистой (дискретной) модели Земли возникает интерференционная картина преломлённых волн. Это приводит к тому, что впереди *PKP*-волн для радиально-симметричной дискретной сферической модели Земли возникает высокочастотное вступление небольшой амплитуды. Причём это вступление имеет вид, характерный для рассеивающего объекта. Анализ лучевой картины и годографа прямой *P*-волны показал, что это полностью объясняется сферической геометрией Земли. При преломлении и отражении прямых *P*-волн в низах внешнего низкоскоростного ядра возникает множество дифракционных волн. Эти волны образуют интерференционную систему, что и приводит к возникновению высокочастотного вступления впереди *PKP*-волн. Это происходит за счёт сферичности Земли. Каждой ветви годографа преломлённых волн соответствует своя дифракционная волна. Заметим, что одна дифракционная волна имеет незначительную амплитуду, но так как их много, то их интерференция приводит к тому, что первое вступление продолжается далеко в сторону меньших углов.

**Ключевые слова:** устойчивое аналитическое решение, неоднородный шар, дискретная модель Земли АК135, волновое поле, отражённые и преломлённые волны, годограф, сферическая симметрия Земли, интерференция, *PKP*-волны, высокочастотные “предвестники”.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-5652489184-88>

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общепринято, что волны “предвестники”, наблюдаемые на сейсмограммах в диапазоне расстояний меньших  $145^\circ$  впереди *PKP*-волн, объясняются рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях в низах мантии. Считается, что в случае непрерывной модели радиально-симметричной Земли впереди *PKP*-волн волновое вступление не образуется [1]. Поэтому объяснение “предвестников”, наблюдаемых на реальных данных впереди *PKP*-волн, рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях [2] на первый взгляд представляется достоверным.

Но ряд исследователей выдвигали гипотезы о природе “предвестников”, возникающих и в радиально-симметричной сферической Земле. В. Gutenberg считал, что “предвестники” были вы-

званы преломлением во внутреннем ядре [3]. В работе [4] предположили, что предвестники обусловлены дифракцией *PKP*-волн на границе ядро—мантия. В работах [5, 6] считают, что “предвестники” вызваны рефракцией или отражением *PKP*-волн на переходных слоях между внутренним и внешним ядром. В работе [7] “предвестники” рассматривались как рефрагированные волны, распространяющиеся в низах внешнего ядра Земли с непрерывным распределением скорости сейсмических волн. При этом скорость в низах внешнего ядра имеет положительный градиент. Более того, в работе [8] показано, что “предвестники” не могут быть волнами, рассеянными на неоднородности в мантии. Эти и ряд других исследований стимулировали авторов на проведение данной работы.

В настоящей работе получено устойчивое аналитическое решение (без помех) для волнового поля продольных волн в слоистом (дискретном) шаре планетарного размера. Приведены расчёты полного волнового поля и годографов продольных волн для дискретной сферической модели Земли АК135 [9] с несущей частотой в 1 Гц. Аналитическое решение

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта Российской Академии наук, Москва

\*E-mail: burmin@ifz.ru

показало, что на углах меньше 145° впереди РКР-волн возникают колебания (“предвестники”) с небольшой амплитудой, имеющие более высокую частоту порядка 1,3 Гц. Причём эти высокочастотные колебания имеют вид, характерный для рассеивающего объекта. Лучевая картина и годограф показывают, что эти высокочастотные колебания обусловлены исключительно сферической геометрией слоистой Земли. Они объясняются интерференцией преломлённых и отражённых продольных волн во внешнем ядре с дискретным распределением скорости распространения сейсмических волн.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Математическая постановка задачи моделирования P-волн формулируется в сферической системе координат (0 ≤ r ≤ R<sub>1</sub>, 0 ≤ θ ≤ π, 0 < φ ≤ 2π) следующим образом: определить функцию u(r, θ, φ, t) из уравнения

$$\frac{1}{v^2(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + f_r \cdot f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями и граничными данными

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (2)$$

На границах r = R<sub>j</sub>, где скорость продольных волн v(r) терпит разрыв, вводятся известные условия сопряжения и ограниченности решения в центре шара [10]:

$$[u] = \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R_j} = 0. \quad (3)$$

В (1), (2) R<sub>1</sub> — радиус шара, f<sub>r</sub> — функция источника, f(t) — временное воздействие.

В данной работе рассматривается постановка для математической линейной упругости. Основным типом условий сопряжения в этом случае являются условия идеального механического контакта, приводящие к условиям непрерывности на слоях, не зависящим от длины волны. Отметим, что при наличии, например, поглощения условия непрерывности на слоях уже будут зависеть от длины волны [12].

**ПОСТРОЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ**

В случае сосредоточенного воздействия f<sub>r</sub> = δ(r - d)  $\frac{\delta(\theta)}{d^2 \sin \theta}$ , приложенного в точке r = d

и θ = 0, возбуждается поле смещения u(r, θ, t), не зависящее от координаты φ. На первом этапе решение ищется в виде разложения Фурье—Лежандра по переменным (θ, t):

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2T} \frac{1}{\sqrt{r}} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(r, k, \omega_n) \exp(i\omega_n t) P_k(\cos \theta). \quad (4)$$

Здесь P<sub>k</sub>(x), (-1 ≤ x ≤ 1), — полином Лежандра, ω<sub>n</sub> = nπ/T.

$$u(r, k, \omega_n) = \frac{2k+1}{2} \times \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} P_k(\cos \theta) u(r, \theta, t) \exp(-i\omega_n t) d \cos \theta dt. \quad (5)$$

В итоге постановка (1), (2) сведена в спектральной области к двухпараметрическому семейству (k, ω<sub>n</sub>) краевых задач в каждом сферическом слое R<sub>j+1</sub> < r < R<sub>j</sub> [11]. Для сокращения записи несущественные переменные обозначаются буквой c, а несущественные индексы опускаются:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(k+0,5)^2}{r^2} u + c \cdot \delta(r-d) F(\omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} u, \quad \frac{du}{dr} - \frac{0,5}{r} u \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (6)$$

Условия сопряжения (3) принимают вид

$$[u] = \left[ \frac{du}{dr} - \frac{0,5}{r} u \right]_{r=R_j} = 0. \quad (7)$$

В работе рассматривается случай слоистого шара. Количество слоёв может быть произвольным. При этом границы расположены при r = R<sub>j</sub>. Скорость продольных волн v в сферических слоях равна v<sub>j</sub>.

Краевая задача второго порядка (6), (7) сводится к двум задачам первого порядка. Для этого по аналогии с [12] вводится вспомогательная функция β(r) следующим образом:

$$\frac{du}{dr} - \frac{0,5}{r} \cdot u = \beta(r) \cdot u. \quad (8)$$

В итоге получен рекуррентный процесс для нахождения функции β(r) для слоистого шара в спектральной области. Искомый рекуррентный процесс зависит от функций Бесселя с индексами k + 0,5 и -k - 0,5. Поскольку функции Бесселя для положительных и отрицательных индексов быстро стремятся к нулю и бесконечности, в решении возникает неопределённость. При этом чем больше радиус

шара в относительных величинах (длинах волн), тем быстрее она возникает. В этой ситуации численное решение становится неустойчивым.

В аналитическое решение входит отношение  $\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)}$ . Это отношение при обращении функции Бесселя  $J_\nu(z)$  в ноль становится неопределённым. Для получения устойчивого решения в [13] предлагается использовать классическую асимптотику

$J_\nu(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ez}{2\nu}\right)^\nu$ . В [14] показано, что классическая асимптотика функций Бесселя даёт ошибку в решении. Это происходит потому, что классическая асимптотика применима при  $\nu \gg |z|$ , а функция Бесселя для больших значений индекса  $\nu$  обращается в ноль уже при  $\nu \sim |z|$ . Получена новая асимптотика:

$$\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{4\nu^2 + 1 - 4z^2}}{2z} \text{ при } J_\nu(z) \rightarrow 0. \quad (9)$$

Это позволяет раскрыть неопределённость в отношении  $\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)}$ , когда знаменатель обращается в ноль.

Далее для построения решения используется новая асимптотика функций Бесселя (9). Это даёт устойчивое аналитическое решение без помехи для волновых полей в неоднородном шаре произвольного размера. Отметим, что  $1/\beta(r)$  есть функция Грина для задачи (6), (7) при  $r = R_1$ . Окончательно суммированием в (4) получаем решение в физиче-

ской области  $u(r, \theta, t)$  для волновых полей в слоистом шаре планетарных размеров.

### РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

На рис. 1 приведён результат решения прямой кинематической задачи для годографа преломлённых  $P$ -волн для радиально-симметричной дискретной (слоистой) скоростной модели Земли АК135. Из рис. 1 видно, что впереди годографа  $PKP$ -волн возникает интерференционная картина преломлённых волн. Причём если лучи выпускаются из источника с меньшим шагом, то волн будет больше и они будут дальше заходить в область меньших углов. Отметим, что для моделей Земли с непрерывным изменением скорости распространения сейсмических волн во внешнем ядре интерференционной картины не возникает.

На рис. 2 приведён фрагмент полного волнового поля  $P$ -волн для радиально-симметричной дискретной (слоистой) скоростной модели Земли АК135 в диапазоне эпицентральных расстояний  $130\text{--}160^\circ$ . Импульс  $f(t)$  в источнике взят в виде функции Гаусса с несущей частотой в 1 Гц [11]. По горизонтали приведено расстояние в градусах. По вертикали — время (возрастает вверх). Буквой  $L$  (Lens) обозначен эффект фокусировки низкоскоростного ядра [11]. Из рис. 2 видно, что впереди  $PKP$ -волн возникают колебания небольшой амплитуды. Спектральный анализ показал, что эти колебания имеют более

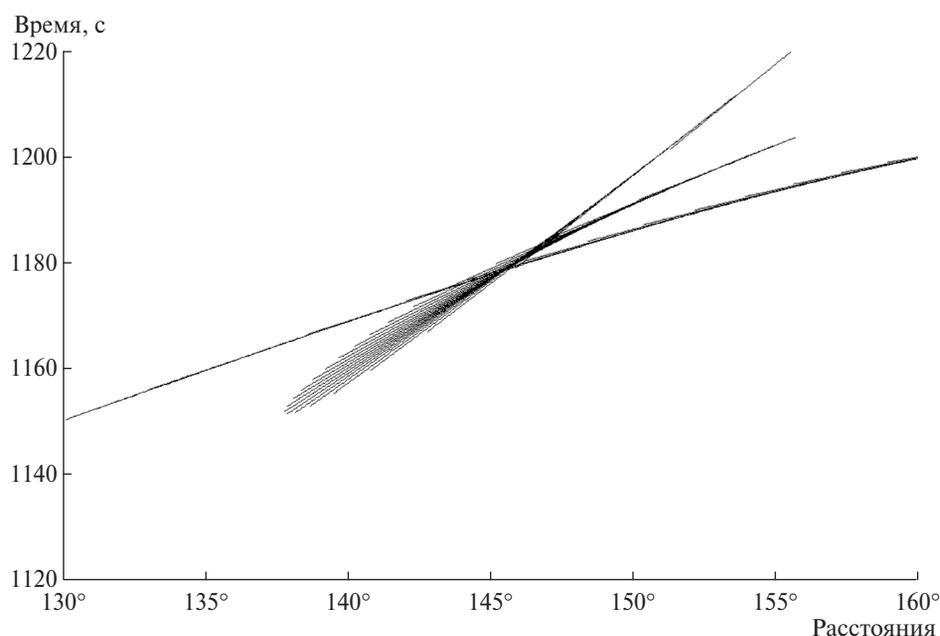


Рис. 1. Годограф преломлённых волн для модели АК135. Лучи выходят из источника с равномерным шагом  $0,03^\circ$ .

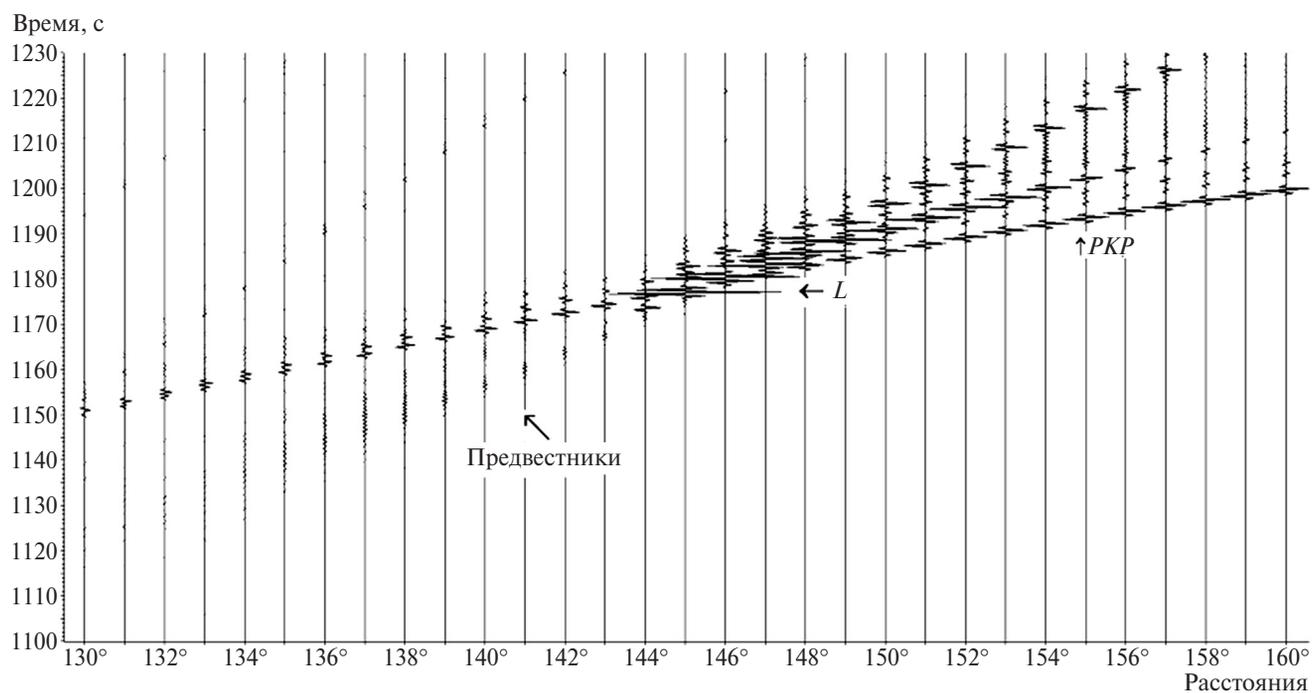


Рис. 2. Фрагмент полного волнового поля  $P$ -волн для радиально-симметричной дискретной (слоистой) модели Земли АК135. Отмечена фокусировка низкоскоростного ядра  $L$  (Lens). По вертикали приведено время в секундах (возрастает вверх). Показан эффект возникновения предвестников впереди  $PKP$ -волн (наклонная стрелка).

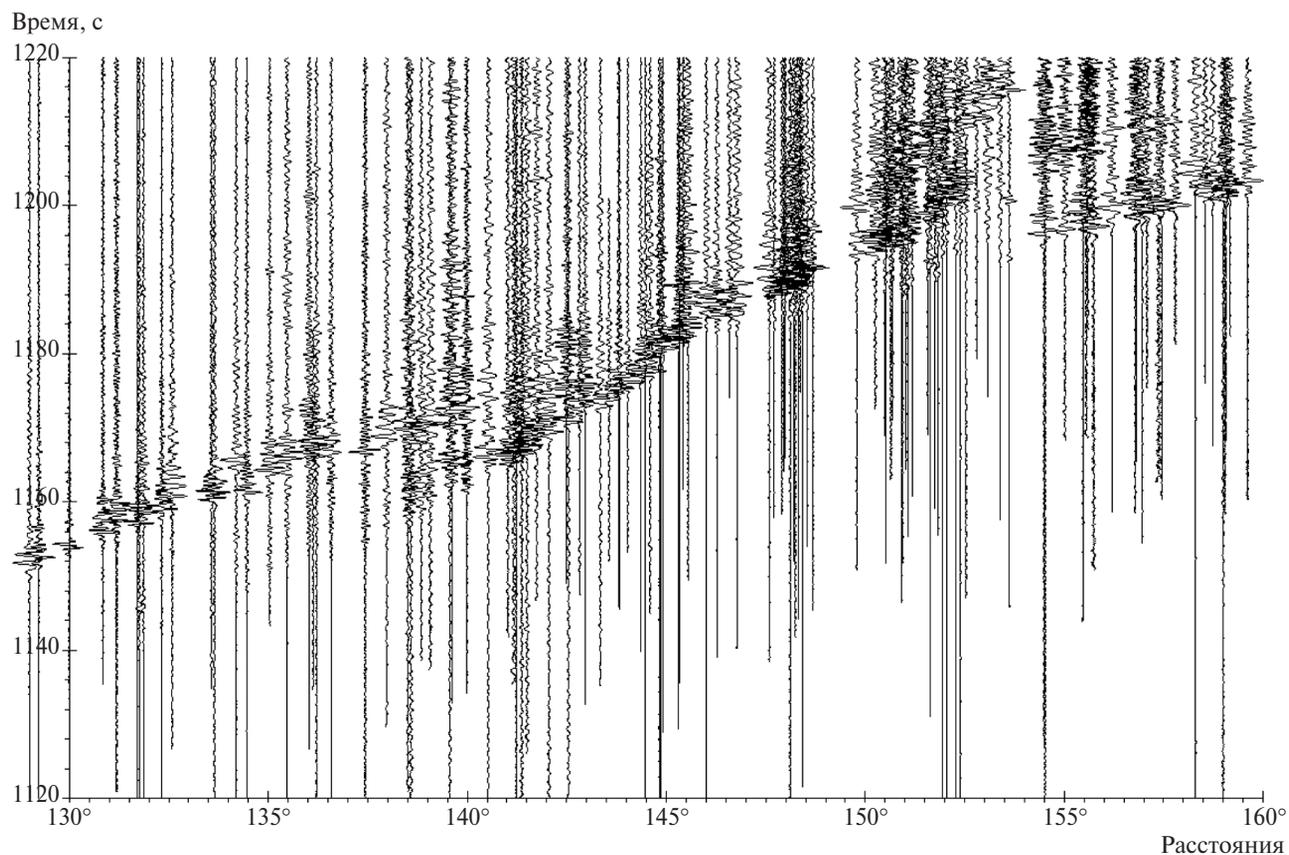


Рис. 3. Фрагмент монтажа сейсмограмм  $P$ -волн, полученного на сейсмических станциях мировой сети.

высокую частоту. Их частота примерно равна 1,3 Гц. Таким образом, явление возникновения небольших высокочастотных колебаний впереди *PKP*-волн полностью объясняется сферической геометрией слоистой Земли.

На рис. 3 представлен монтаж нормированных сейсмограмм, полученный по данным мировой сети сейсмических станций [8]. На этом рисунке “предвестники” хорошо прослеживаются начиная со  $137^\circ$ , а при тщательном рассмотрении можно увидеть вступление “предвестников” и на  $132^\circ$ . Хотя в диапазоне расстояний  $132^\circ$ – $137^\circ$  “предвестники” плохо различимы на фоне сейсмического шума. Тем не менее сравнение рис. 2 и 3 показывает, что теоретические сейсмограммы во многом похожи на экспериментальные сейсмограммы, полученные мировой сетью сейсмических станций. Это сравнение подтверждает справедливость сделанных в настоящей работе выводов о природе предвестников сейсмических волн, возникающих во внешнем дискретном ядре земли.

Результаты данной работы показывают, что для объяснения возникновения “предвестников” не нужно вводить рассеивающие объекты. “Предвестники” возникают и для классической сферической дискретной (слоистой) модели Земли.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wen L., Helmberger D.V.* // Science. 1998. V. 279. Iss. 5357. P. 1701–1703.
2. *Hedlin M.A.H., Shearer P.M., Earle P.S.* // Nature. 1997. V. 387 (6629). P. 145–150.
3. *Gutenberg B.* // Eos Trans. AGU. 1957. V. 38. P. 750–753.
4. *Bullen K.E., Burke-Gaffney T.N.* // Geophys J. Int. 1958. V. 1. P. 9–17.
5. *Bolt B.A.* // Nature. 1962. V. 196. P. 122–124.
6. *Sacks I.S., Saa G.* // Year Book Carnegie Inst. Washington. 1969. V. 69. P. 419–426.
7. *Бурмин В.Ю.* // Физика Земли. 2004. № 6. С. 24–41.
8. *Бурмин В.Ю., Бойко А.Н.* // ДАН. 2017. Т. 472. № 2. С. 197–200.
9. *Kennett B.L.N., Engdahl E.R., Buland R.* // Geophys. J. Int. 1995. № 122. P. 108–124.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
11. *Fatyanov A.G., Burmin V.Yu.* // Planetary and Space Science. 2018. V. 153. P. 100–106.
12. *Фатьянов А.Г.* // ДАН. 1990. Т. 310. № 2. С. 323–327.
13. *Korneev V.A., Johnson L.R.* // Geophys. J. Int. 1993. № 115. P. 230–250.
14. *Фатьянов А.Г.* // Матем. заметки СВФУ. 2016. Т. 23. № 3. С. 91–103.
15. *Seiji T., Ando Kazuto, Takayuki M., Daniel P., Komatitsch D., Tromp Jeroen.* // Int. J. High Performance Computing Appl. 2016. V. 30 (4). P. 411–422.

## OCCURRENCE OF “PRECURSORS” OF *PKP*-WAVES IN THE LAYERED RADIAL-SYMMETRIC EARTH

A. G. Fatyanov<sup>1</sup>, V. Yu. Burmin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A. O. Gliko February 14, 2019

Received February 19, 2019

It is generally accepted that *PKP*-waves “precursors”, which are observed on a real data ahead of *PKP*-waves, are explained by scattering on small-scale inhomogeneities in the lower mantle. In this paper, a stable analytical solution (without interference) was obtained for the wave field of longitudinal waves in a layered (discrete) ball of planetary size. The calculations of the total wave field, rays and travel-time curves of longitudinal waves for the spherical model of the Earth AK135 with a carrier frequency of 1 hertz are presented. The analytical solution showed that at angles smaller than 145 degrees ahead of the *PKP*-waves, low-amplitude waves appear, with a higher frequency of about 1,3 hertz. Indeed, these high-frequency oscillations have the form characteristic for waves scattered at a certain object. The ray pattern and the travel-time graph show that these high-frequency oscillations are due to exclusively to the spherical geometry of the Earth. This could be explained by the interference of refracted and reflected longitudinal waves in the bottom of a discrete outer core. This field propagates even further towards smaller angles due to the interference of diffraction waves.

*Keywords:* stable analytical solution, inhomogeneous sphere, discrete Earth Model AK135, wave field, refracted seismic waves, travel-time, spherical geometry of the Earth, high-frequency “precursors”.