УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ*)

В. И. Васильев, М. В. Васильева, В. С. Гладких, В. П. Ильин, Д. Я. Никифоров, Д. В. Перевозкин, Г. А. Прокопьев

Рассматриваются методы численного моделирования течения жидкости в трещиноватой пористой среде. Учет трещин производится явно с использованием дискретной модели трещин. Поставленная однофазная задача фильтрации аппроксимируется неявным методом конечных элементов на неструктурированных сетках, разрешающих трещины на сеточном уровне. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решаются итерационными методами декомпозиции областей в подпространствах Крылова с использованием библиотеки параллельных алгоритмов KRYLOV. Представлены результаты решения модельной задачи. Проведено исследование эффективности вычислительной реализации при различных значениях коэффициентов контрастности, которые существенно сказываются на числе обусловленности и количестве необходимых итераций, необходимых для сходимости метода.

Ключевые слова: фильтрация, трещиноватые среды, дискретная модель трещин, аппроксимация, дебит, метод конечных элементов, неструктурированные сетки, итерационные методы.

DOI 10.17377/SIBJIM.2018.21.400

Введение. При разработке нефтяных и газовых месторождений необходимо реалистичное описание поведения жидкости в коллекторе. С этой точки зрения описание трещин в явном виде является более точным по сравнению с традиционными моделями двойной пористости [1]. Одним из таких методов является дискретная модель трещин (Discrete Fracture Model, DFM), в которой полагается, что трещины оказывают доминирующее влияние на потоки флюида, хотя общий объем трещин очень мал, так как их апертура низкая и в них нефть практически не хранится, но за счет большей проницаемости основное течение происходит именно по трещинам. Как правило, трещины представляются явным образом объектами размерностью на порядок ниже размерности коллектора [2–5].

Модель дискретных трещин рассматривается как метод, который имеет хорошую применимость для пласта с низкой степенью развития трещин, особенно когда резервуар имеет несколько крупных трещин, которые контролируют направление потока. Концептуальная модель дискретных трещин была введена в работе [13]. Модель, которая в данное время активно применяется,

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-29-15122 офи-м, 18-01-00295, 17-01-00732) и Мегагранта Правительства Российской Федерации (проект 14.Y26.31.0013).

представлена в [14], где задача решалась с использованием метода конечных элементов, в предположении, что пористая среда является двумерной плоскостью, а трещины — одномерными линиями с высокой проницаемостью. Применение дискретной модели трещин и методов численного решения задач двухфазной фильтрации рассматривалось в работах [6–15].

После аппроксимации дифференциальной задачи необходимо решать СЛАУ с большим количеством неизвестных. В силу наличия трещин рассматриваемая задача становится идентичной задаче с сильно неоднородными коэффициентами. Следовательно, число обусловленности результирующей матрицы возрастает за счет большой разницы между коэффициентами проницаемости пористой среды и сети трещин, и чем больше разница между коэффициентами, тем больше становится число обусловленности. Известно, что обусловленность матрицы напрямую влияет на количество итераций при решении системы уравнений итерационными методами.

Работа посвящена численному исследованию особенностей решения СЛАУ, возникающей в результате неявной конечно-элементной аппроксимации плохо обусловленной задачи с использованием итерационных методов декомпозиции областей в подпространствах Крылова [16]. При численной реализации СЛАУ использованы двухуровневые итерационные методы из библиотеки параллельных алгоритмов KRYLOV [17–23]. Для решения задач использовался аддитивный метод Шварца, выступающий в роли предобусловливателя исходной матрицы в методе FGMRes. Приводятся результаты численных экспериментов с различным контрастом коэффициентов проницаемости пористой среды и трещин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение неразрывности в области $\Omega \in \mathbb{R}^d$, описывающее однофазное движение жидкости в пористой среде:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{1}$$

где φ — пористость коллектора, ρ — плотность жидкости, p — давление, $k = k(\mathbf{x})$ — тензор проницаемости пористой среды, μ — вязкость флюида, u — скорость течения жидкости, которая описывается законом Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Поскольку толщина трещин является на несколько порядков меньше, чем размеры области Ω, учет их на сеточном уровне приводит к задачам большой размерности. Рассмотрим далее альтернативный подход, используемый для постановки задачи фильтрации в трещиноватых средах. Данный подход основан на представлении трещины в виде интерфейсного условия на некоторой внутренней границе γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, где $d = 2, 3$.

Как правило, трещина Ω_f является очень тонкой и, следуя [24], мы можем заменить d-размерное уравнение в $\Omega_f \subset \mathbb{R}^d$ на $(d-1)$-размерное уравнение на поверхности $\gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$ посредством интегрирования уравнений сохранения массы и закона Дарси по толщине трещины. Пусть трещина имеет толщину $b = b(s)$ и

$$\Omega_f = \{x \in \Omega \mid x = s + e n_f,\ s \in \gamma,\ -b/2 < e < b/2\},$$

где γ — гладкая поверхность, n_f — нормаль к γ. Проинтегрируем по толщине уравнение сохранения массы и запишем его в виде уравнения на поверхности γ:

$$\int\limits_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t}\, dn_f + \int\limits_{-b/2}^{b/2} \operatorname{div}_\tau u\, dn_f + \int\limits_{-b/2}^{b/2} \operatorname{div}_{n_f} u\, dn_f = \int\limits_{-b/2}^{b/2} f\, dn_f,$$

где div_τ и div_{n_f} — оператор тангенциальной и нормальной дивергенции на γ; $f = \sum\limits_i q_i \delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ — совокупная интенсивность источников/стоков в окрестности $\mathbf{x}_i$; q_i — интенсивность i-го источника/стока, причем

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1/(\pi\varepsilon^2), & |x - x_i| \le \varepsilon, \\ 0, & |x - x_i| > \varepsilon, \end{cases}$$

ε — радиус скважины.

Пусть p_f и u_f — средние давление и скорость вдоль трещины γ:

$$p_f = \frac{1}{b} \int\limits_{-b/2}^{b/2} p \, dn_f, \quad u_f = \int\limits_{-b/2}^{b/2} u_{f,\tau} \, dn_f,$$

где $u = u_{f,n_f} + u_{f,\tau}$ (u_{f,n_f}, $u_{f,\tau}$ — нормальная и тангенциальная компоненты скорости). Поскольку

$$\int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{div}_{n_f} u \, dn_f = [u \cdot n_f], \quad [u \cdot n_f] = u^+ \cdot n_f - u^- \cdot n_f,$$

где u^+ и u^- — значения скорости слева и справа от поверхности γ, то получим следующее уравнение на поверхности γ:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \mathrm{div}_\tau u_f + [u \cdot n_f] = f, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \tag{3}$$

Закон Дарси запишем следующим образом:

$$u_{f,\tau} = -\frac{k_{f,\tau}}{\mu} \mathrm{grad}_\tau p_f, \quad u_{f,n_f} = -\frac{k_{f,n_f}}{\mu} \mathrm{grad}_{n_f} p_f, \tag{4}$$

где k_{f,n_f}, $k_{f,\tau}$ — нормальная и тангенциальная компоненты коэффициента проницаемости k_f. Проинтегрировав уравнения (4) по толщине трещины, получим

$$u_f = -b \frac{k_{f,\tau}}{\mu} \mathrm{grad}_\tau p_f, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \tag{5}$$

$$\{u \cdot n_f\} = -\frac{k_{f,n_f}}{b\mu} [p], \quad x \in \gamma, \tag{6}$$

$[p] = (p^+ - p^-)$ — скачок давления, $\{u \cdot n_f\} = (u^+ \cdot n_f + u^- \cdot n_f)/2$ — средняя скорость.

Для определения среднего давления вдоль трещины можно использовать линейное приближение следующего вида:

$$p_f = \{p\} + \frac{d\mu}{k_{f,n_f}} [u \cdot n_f], \quad x \in \gamma. \tag{7}$$

Таким образом, мы получили связанную систему уравнений, описываемую d-размерным уравнением (1) в области Ω и $(d-1)$-размерным уравнением в трещине с внутренним источником, которое зависит от потока из матрицы пористой среды в трещины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_f \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_\tau u_f + [u \cdot n_f] = f, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \\ u_f = -b \frac{k_{f,\tau}}{\mu} \mathrm{grad}_\tau p_f, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \end{aligned} \tag{8}$$

где b — толщина трещины, k_f — проницаемость трещин, p_f и u_f — давление и скорость течения жидкости. Более подробно вывод и описание рассматриваемой модели можно найти в работах [24–29].

Далее, будем рассматривать случай течения несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ в упругодеформируемой пористой среде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_r \varphi_0 \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{9}$$

где φ_0 — пористость при некотором заданном p_0; c_r — сжимаемость пористой среды.

Подставляя закон Дарси (2) в уравнение неразрывности (1), приходим к следующему параболическому уравнению, разрешенному относительно давления p [1, 30]:

$$c\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{10}$$

где $c = c_r\varphi_0$.

Аналогично для течения в сети трещин получаем

$$c_f\frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}\left(b\frac{k_f}{\mu}\operatorname{grad} p_f\right) + [u \cdot n_f] = f, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \tag{11}$$

Отметим, что обменный переток между трещиной и матрицей пористой среды также присутствует и в уравнении для матрицы пористой среды в виде интерфейсного условия, которое появляется при аппроксимации задачи. (Данная модель смешанной размерности, описывающая течение в пористой трещиноватой среде, является широко известной [24–29].)

Уравнение (10) дополним начальным условием, граничным условием Неймана и интерфейсным условием:

$$p(\mathbf{x},0) = p_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega; \quad p_f(\mathbf{x},0) = p_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \gamma; \tag{12}$$

$$u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad u_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\gamma; \tag{13}$$

$$\{u \cdot n_f\} = -\sigma(p - p_f), \quad \sigma = k_{f,n_f}/(b\mu), \quad x \in \gamma, \tag{14}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе области.

2. Конечно-элементная аппроксимация. Рассмотрим пространственную дискретизацию методом конечных элементов системы уравнений (10), (11) с интерфейсным условием (14). Для аппроксимации трещин воспользуемся дискретной моделью трещин [25]. Данный подход основан на представлении трещин на неструктурированной сетке гранями конечных элементов.

Пусть $\mathcal{T}_h$ — некоторое разбиение области на элементы K (ячейки расчетной сетки). В случае высокопроницаемых трещин мы предполагаем, что $p^+ = p^- = p_f$ [24] и

$$\int\limits_K \nabla \cdot u\, z\, dx = -\int\limits_K u \cdot \nabla z\, dx + \int\limits_\gamma [u \cdot n_f] z\, ds.$$

Тогда с учетом интерфейсного условия для матрицы пористой среды получим

$$\int\limits_\Omega c\frac{\partial p}{\partial t} z\, dx + \int\limits_\Omega \left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} z\right) dx - \int\limits_\gamma [u \cdot n_f] z\, ds = 0 \tag{15}$$

и для трещин

$$\int\limits_{\gamma} c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} z_f \, ds + \int\limits_{\gamma} \left(b \frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p_f, \operatorname{grad} z_f \right) ds + \int\limits_{\gamma} [u \cdot n_f] z_f \, ds = \int\limits_{\gamma} f z_f \, ds, \quad (16)$$

При $p_f = p$ с использованием метода суперпозиции получим

$$\int\limits_{\Omega} c \frac{\partial p}{\partial t} z \, dx + \int\limits_{\Omega} \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \operatorname{grad} z \right) dx + \sum_j \left(\int\limits_{\gamma_j} c_f \frac{\partial p}{\partial t} z_f \, ds + \int\limits_{\gamma_j} \left(b \frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p, \operatorname{grad} z_f \right) ds \right) = \sum_j \int\limits_{\gamma_j} f z_f \, ds, \quad (17)$$

где $j = \overline{1, M_f}$ и M_f — количество дискретных трещин. Более подробно вывод аппроксимации можно посмотреть в работе [25].

Для аппроксимации по времени воспользуемся чисто неявной дискретизацией уравнений

$$\int\limits_{\Omega_m} c \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} z \, dx + \sum_i \int\limits_{\gamma_i} c_f \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} z_f \, ds + \int\limits_{\Omega} \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} z \right) dx + \sum_i \int\limits_{\gamma_i} \left(b \frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} z_f \right) ds = \sum_i \int\limits_{\gamma_i} f^n z_f \, ds, \quad (18)$$

где γ_i — область i-й трещины, τ — шаг по времени, n — номер временного слоя.

В качестве базисных функций будем использовать простейшие непрерывные линейные финитные функции первого порядка. Для стандартного метода Галеркина решение задачи и тестовые функции запишем в виде

$$p_h = \sum_{i=1}^{N} p_i \varphi_i, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i,$$

где φ_i — кусочно-линейные базисные функции, а N — количество узлов расчетной сетки $\mathcal{T}_h$. Таким образом, соотношение (18) сводится к системе алгебраических уравнений

$$(M + \tau A) p^{n+1} = M p^n, \quad (19)$$

где M и A — соответственно симметричные матрицы масс и жесткости, имеющие вид

$$M = \left\{ m_{ij} = \int\limits_{\Omega} c \varphi_i \varphi_j \, dx + \sum_k \int\limits_{\gamma_k} c_f \psi_i \psi_j \, dx \right\},$$

$$A = \left\{ a_{ij} = \int\limits_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx + \sum_k \int_{\gamma_k} \frac{k_f}{\mu} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dx \right\},$$

где ψ_i — линейные базисные функции, определенные только на трещинах.

Для понимания метода DFM рассмотрим (рис. 1) аппроксимацию матрицы масс двух треугольных конечных элементов K_1 и K_2, на пересечении которых имеется одномерная трещина E. Здесь элементы матрицы имеют следующий вид:

$$m_{ij}^{K_1} = \int\limits_{K_1} c\varphi_i\varphi_j \, dx, \quad i,j = 1,2,3,$$

$$m_{ij}^{K_2} = \int\limits_{K_1} c\varphi_i\varphi_j \, dx, \ i,j = 2,3,4,$$

$$m_{ij}^{E} = \int\limits_{E} c_f\psi_i\psi_j \, dx, \ i,j = 2,3.$$

Данные величины составляют в совокупности элементы локальных матриц масс:

$$\begin{bmatrix} m_{11}^{K_1} & m_{12}^{K_1} & m_{13}^{K_1} & 0 \\ m_{21}^{K_1} & m_{22}^{K_1} + m_{22}^{K_2} & m_{23}^{K_1} + m_{23}^{K_2} & m_{24}^{K_2} \\ m_{31}^{K_1} & m_{32}^{K_1} + m_{32}^{K_2} & m_{33}^{K_1} + m_{33}^{K_2} & m_{34}^{K_2} \\ 0 & m_{42}^{K_2} & m_{43}^{K_2} & m_{44}^{K_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}^{E} & m_{23}^{E} & 0 \\ 0 & m_{32}^{E} & m_{33}^{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11}^{K_1} & m_{12}^{K_1} & m_{13}^{K_1} & 0 \\ m_{21}^{K_1} & m_{22}^{K_1} + m_{22}^{K_2} + m_{22}^{E} & m_{23}^{K_1} + m_{23}^{K_2} + m_{23}^{E} & m_{24}^{K_2} \\ m_{31}^{K_1} & m_{32}^{K_1} + m_{32}^{K_2} + m_{32}^{E} & m_{33}^{K_1} + m_{33}^{K_2} + m_{33}^{E} & m_{34}^{K_2} \\ 0 & m_{42}^{K_2} & m_{43}^{K_2} & m_{44}^{K_2} \end{bmatrix}$$

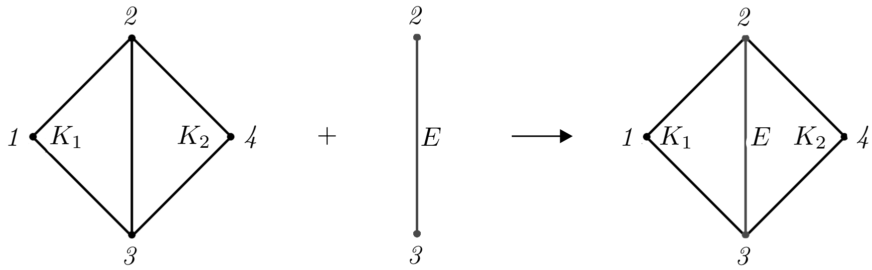


Рис. 1. Аппроксимация DFM

3. Решение алгебраических систем. На каждом n-м шаге численного интегрирования по времени исходной начально-краевой задачи необходимо решать СЛАУ вида (19). Данная процедура осуществляется итерационно до выполнения условия достаточной малости евклидовой нормы вектора невязки:

$$\|r^{n+1,k}\| \le \varepsilon_n \|r^{n+1,0}\|, \quad \varepsilon_n \ll 1, \quad k = 1, \ldots, m_{n+1}, \tag{20}$$

где k есть номер текущей итерации и

$$r^{n+1,k} = f^n - \left(\frac{1}{\tau}M + A\right)p^{n+1,k}, \quad f^n = g - \frac{1}{\tau}Mp^n. \tag{21}$$

В силу (21) для приближенного решения $p_\varepsilon^{n+1} = p^{n+1,m+1}$ алгебраической системы (19) справедливо соотношение [19]

$$\frac{1}{\tau}M + Ap_\varepsilon^{n+1} = g + \frac{1}{r}Mp^n - r_\varepsilon^{n+1}, \quad r_\varepsilon^{n+1} = r_\varepsilon^{n+1,m_n}. \tag{22}$$

С другой стороны, для вектора $(p)_h^{n+1}$, компоненты которого суть значения точного решения в узлах пространственно-временной сетки, выполняется равенство

$$\left(\frac{1}{\tau}M + A\right)p_h^{n+1} = g + \frac{1}{\tau}Mp_h^n + \psi^n, \tag{23}$$

где $\psi^n = \psi_\tau^n + \psi_n^n = O(\tau + h)$ есть вектор суммарной временной и пространственной погрешностей аппроксимации. Отсюда для вектора полной ошибки численного решения z^{n+1} имеем

$$\left(\frac{1}{\tau}M + A\right)z^{n+1} = \frac{1}{\tau}Mz^n + \psi^n + r_\varepsilon^{n+1}, \quad z^{n+1} = p_h^{n+1} - p_\varepsilon^{n+1}. \tag{24}$$

Из этого равенства следуют рекуррентные неравенства для векторных норм:

$$\|z^{n+1}\| \le \|(I + \tau M^{-1}A)^{-1}\|(\|z^n\| + \tau\|M\| \cdot \left\|\psi^n + r_\varepsilon^{n+1}\right|), \tag{25}$$

откуда при естественных предположениях о положительной полуопределенности матрицы $M^{-1}A$ и ограниченности нормы M^{-1} следует ограниченность нормы ошибки $\|z^{n+1}\|$ при численном интегрировании исходной задачи на ограниченном интервале по времени, поскольку $n = T/\tau$.

Из рассматриваемых соотношений определяется необходимость выполнения балансировки между величинами пространственной и временной аппроксимаций, а также итоговой невязки итерационного решения СЛАУ для каждого n. Для уменьшения количества итераций m_n актуальным является вопрос выбора хорошего начального приближения $p^{n+1,0}$. При достаточно малом шаге τ простейшим способом является определение $p^{n+1,0} = p^n$. Естественным развитием данного подхода является использование схемы предиктор-корректор, т. е. предварительное применение явной схемы вместо (19):

$$p^{n+1} = p^n + \tau M^{-1}(g - Ap^n). \tag{26}$$

Для решения заданной достаточно большой СЛАУ с разреженной матрицей, хранящейся изначально в сжатом формате (конкретно, Compressed Sparse Row, CSR) в памяти одного процессора, применяется библиотека KRYLOV, которая предусматривает следующие технологические этапы.

1. Сбалансированная алгебро-геометрическая декомпозиция расчетной области (с заданным количеством сеточных слоев пересечения подобластей), т. е. фактически проведение разбиения матрицы на блочные строки примерно одинакового размера и распределение полученных подсистем по различным MPI-процессам при одновременной модификации околограничных уравнений для реализации различных типов интерфейсных условий (Дирихле, Неймана или Ньютона — Робена) на смежных узлах контактирующих подобластей.

2. Организация синхронного решения сформированных алгебраических подсистем в подобластях на соответствующих многоядерных процессорах с реализацией «внутреннего» распараллеливания с помощью многопотоковых вычислений, при этом используются предобусловленные итерационные алгоритмы в подпространствах Крылова, а также осуществляется буферизация интерфейстных данных для подготовки последующих экономичных обменов между соседними MPI-процессами.

3. Выполнение внешнего итерационного процесса по подобластям на основе блочного метода Шварца — Якоби в подпространствах Крылова с применением ускоряющих процедур грубосеточной коррекции или агрегации на основе малоранговой аппроксимации исходной матрицы.

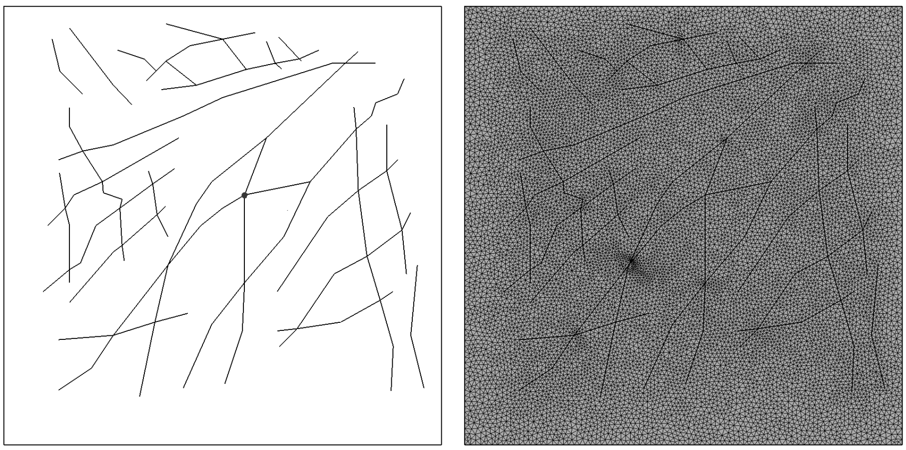
Очевидно, что при многократном решении СЛАУ на различных шагах по времени повторяющиеся процедуры выполняются один раз до начала основных вычислений. Естественно также, что в массовых расчетах однотипных задач оптимальное планирование машинного эксперимента требует предварительных исследований по подбору алгоритмических параметров с выработкой практических рекомендаций, которые могут значительно повысить эффективность моделирования.

4. Численное исследование результатов моделирования. Рассмотрим численное решение задачи (10)–(13) однофазной фильтрации с сетью трещин в двумерной и трехмерной постановках. Пористая среда предполагается гомогенной, но за счет трещин вся область Ω является сильно гетерогенной. Разница между проницаемостью пористой среды и проницаемостью трещин задает эту неоднородность. Пусть $\eta = k_f/k$ — параметр неоднородности среды. Для исследования влияния этого параметра на сходимость итерационного метода, рассмотрим его с разными значениями $\eta = 10^5$, $\eta = 10^6$, $\eta = 10^7$, $\eta = 10^8$, увеличивая только k_f по формуле $k_f = k\eta$. Толщину трещин α_i возьмем для всех трещин одинаковыми, т. е. $\alpha = 0,01$ м.

Аппроксимация уравнений и построение матриц проводится на вычислительной платформе FEniCS [13] с открытым исходным кодом (LGPLv3). Решение СЛАУ осуществляется двухуровневыми итерационными процессами в подпространствах Крылова, предобусловливаемые с помощью аддитивного метода Шварца и декомпозиции расчетной области (при параллельных вычислениях) с параметризованными пересечениями подобластей, реализованные в библиотеке KRYLOV [17–19]. Внешним и внутренним итерационным методом выступает FGMRES, а в подобластях использовался предобусловливатель Eisen (модификация алгоритма неполной факторизации Айзенштата).

Для численных экспериментов входные данные возьмем следующими: $\varphi_m = 0,4$; $\varphi_f = 1$; $c_R = 10^{-9}$ Па$^{-1}$; $k = 10^{-15}$ м^2; $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ Па $\cdot$ с; $\tau = 1$ сутки; $p_0 = 10$ МПа.

5.1. Численное исследование в двумерном случае. В данной работе используется реальная модель пласта, которая находится на северо-западе Китая из работы [21]. Рассмотрим задачу в двумерной постановке с одним источником, моделирующую скважину (рис. 2, *а*). Область является квадратной со сторонами по 4 км и имеет сеть трещин. Построим сетку с 13568 вершинами и 26814 треугольными элементами (рис. 2, *б*) с помощью свободно распространяемой программы Gmsh [27]. Сетка строится таким образом, что трещины являются гранями треугольных элементов.



а *б*

Рис. 2. Геометрия и сетка в $2D$

Правая часть в уравнении (10) является источником $f = -PI(p^n(x) - p_b)$ ($p_b = 10^5$ Па — призабойное давление, PI — коэффициент Писмана) и имеет вид

$$PI = \frac{2\pi k H_3}{\mu \log(r_e/r_w)}, \tag{27}$$

где $r_w = 0,1$ м — радиус скважины, $r_e = He^{-\pi/2} \approx 0,20788H$ — эквивалентный радиус (радиус Писмана или радиус контура питания скважины), H_3 — высота скважины, H — расстояние от центра скважины до ближайщего узла.

Зависимость среднего количества итераций N_{iter} от параметра контрастности среды η представлена в табл. 1. и на рис. 3, *а, б*. Как известно, неоднородность среды влечет за собой увеличение числа обусловленности и количества итераций, что подтверждается приведенными данными.

На рис. 3, *в, г* показаны графики зависимости дебита и среднего давления соответственно от параметра η в каждый момент времени.

Т а б л и ц а 1

Среднее количество итераций N_{iter} в зависимости от η

η	1	2	3	4
N_{iter}	3,11	6,12	19,35	53

В DFM трещины являются высокопроницаемыми пустотами, и они определяют основное направление и плотность течения флюида. На рис. 4 показано распределение поля давления p на конечный момент времени в зависимости от η, где при ее больших значениях основное течение идет по трещинам.

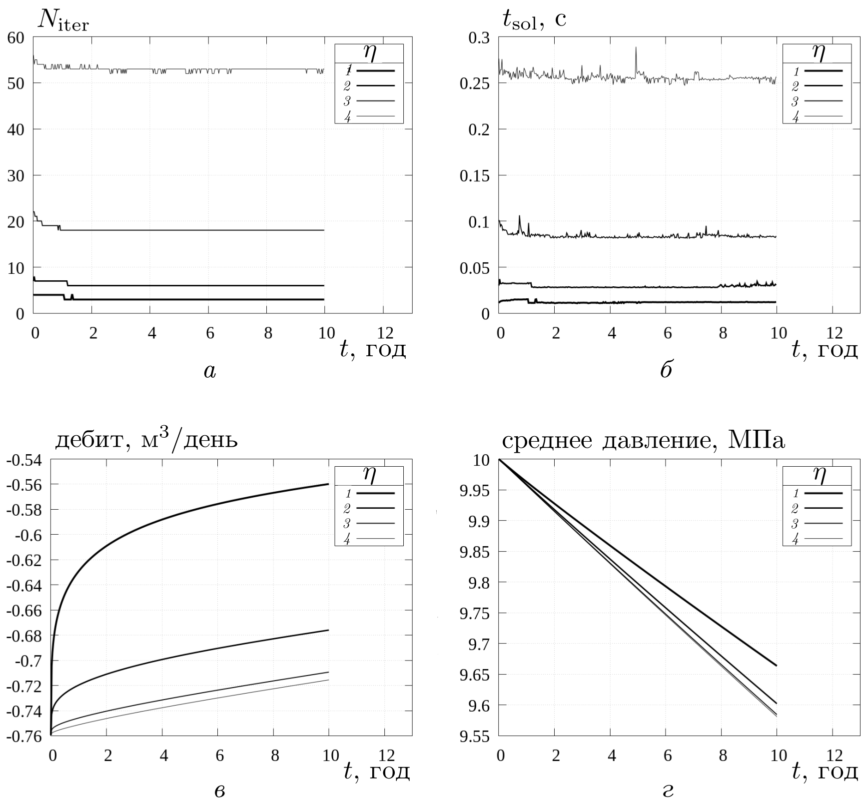


Рис. 3. Графики количества итераций (*а*), времени решения (*б*), дебита скважины (*в*) и среднего давления (*г*) в зависимости от η

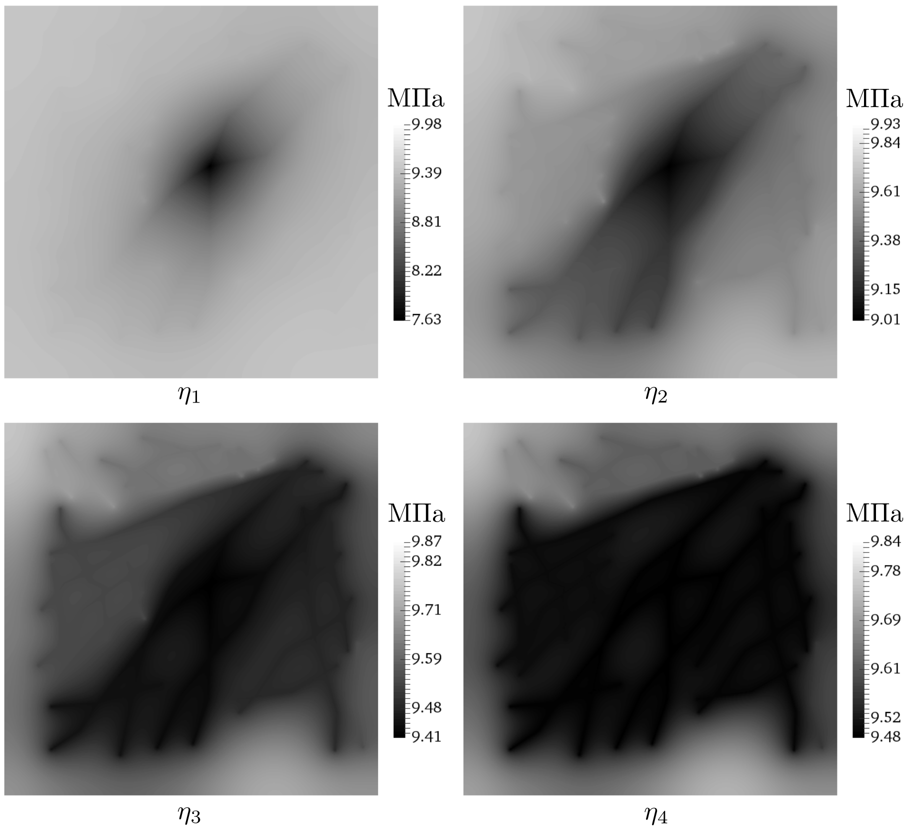


Рис. 4. Распределение давления при $t = 10$ лет

5.2. Численные эксперименты для 3D. В случае трехмерного моделирования трещины представляются в виде двумерных плоскостей. При построении трехмерной геометрии за основу взята геометрия двумерной задачи (рис. 2, *а*). Область является параллелепипедом со сторонами по 4 км и высотой 300 м. Трещины располагаются вертикально по середине области и имеют высоту 200 м (рис. 5, *а*).

Для исследования влияния параметра η на решение задачи сгенерируем следующие две сетки с разными количествами узлов и тетраэдральных элементов:

сетка 1: 720822 узлов и 3759775 элементов (рис. 5, *б*);

сетка 2: 1621228 узлов и 9358641 элементов (рис. 5, *в*).

Задача (10)–(13) решалась на вычислительном кластере НКС-1П Сибирского суперкомпютерного центра, использовались 20 узлов с Intel Xeon E5-2697v4 (2,6 Ггц, 16 ядер). Область разбивается на подобласти, количество которых равно количеству параллельных MPI-процессов. В табл. 2 представлены средние числа итераций и времена решения (в секундах) в зависимости от параметра η, где мы видим, что задача, запущенная на 16 MPI-процессах, показывает более быструю работу. При увеличении количества MPI-процессов увеличивается количество итераций, но уменьшается время решения СЛАУ. Также из результатов следует, что при увеличении количества MPI-процессов уменьшается разрыв времени решения при различных параметрах проницаемости трещин k_f. На рис. 6 представлены решения задачи в момент времени $t = 1$ год при различных значениях параметра η на сетке 2.

Т а б л и ц а 2

Среднее количество итераций N_{iter} и время решения t_{sol} в зависимости от η

Сетка	η		Количество процессов					
			1	2	4	8	12	16
Сетка 1 $N = 720822$	1	N_{iter}	7,31	8,31	19,79	19,82	19,8	19,77
		t_{sol}	8,18	2,28	2,67	1,57	1,3	1,2
	2	N_{iter}	20,86	20,77	56,35	55,21	54,66	52,72
		t_{sol}	22,01	5,71	7,73	3,9	2,79	2,14
	3	N_{iter}	63,35	62,01	194,59	191,27	184,71	177,79
		t_{sol}	68,1	17,08	27,2	12,7	8,34	5,79
Сетка 2 $N = 1621228$	1	N_{iter}	8,47	26,63	30,86	37,82	38,27	37,31
		t_{sol}	24,38	19,45	10,01	7,04	6,25	4,34
	2	N_{iter}	24,73	33,55	49,28	90,1	91,24	91,37
		t_{sol}	67,05	24,03	15,69	16,03	13,42	8,6
	3	N_{iter}	73,36	77,76	199,84	564,15	416,8	347,4
		t_{sol}	202,03	61,43	65,29	95,24	56,75	28,07

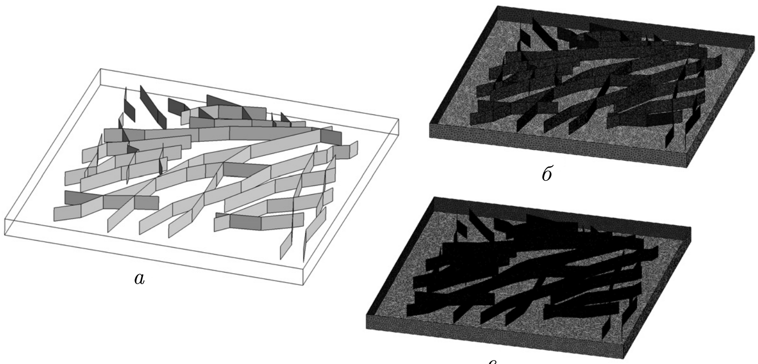


Рис. 5. Геометрия сетки в области $3D$

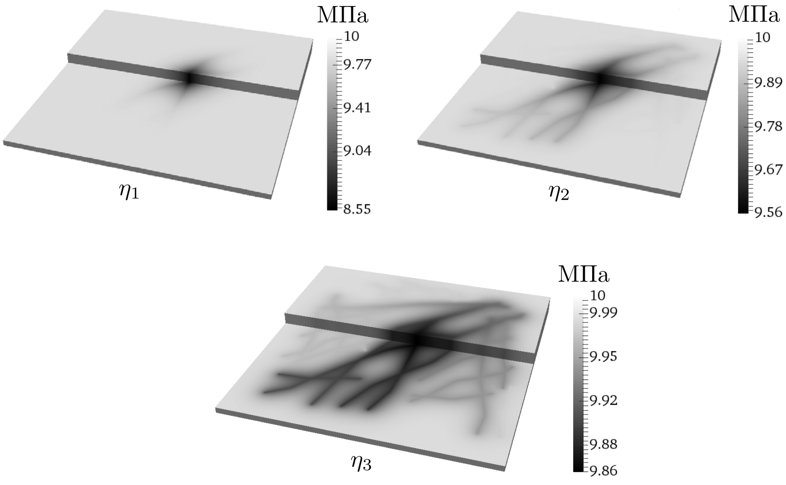


Рис. 6. Распределение давления при $t = 1$ год на сетке 2 при разных η

Заключение. Рассмотрена модель дискретных трещин (DFM), которая моделирует трещины в явном виде. Показано сильное влияние трещин на скорость течения жидкости при больших значениях проницаемости. Для решения СЛАУ использовалась библиотека параллельных алгоритмов KRYLOV. Показана прямая зависимость числа итераций и времени решения от проницаемости трещин. Проведено численное исследование влияния проницаемости трещины на сходимость итерационного метода для задачи фильтрации в двумерной и трехмерной постановках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.
2. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M.* Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media // Comput. Geosciences. 2016. V. 20, N 5. P. 953–973.
3. *Chung E.T., Efendiev Y., Leung T., Vasilyeva M.* Coupling of multiscale and multi-continuum approaches // GEM-Internat J. Geomathematics. 2017. V.‘8, N 1. P. 9–41.
4. *Akkutlu I.Y., Efendiev, Y., Vasilyeva, M., Wang Y.* Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media // J. Natural Gas Sci. Engrg. 2017. V. 48. P. 65–76.
5. *Yalchin Efendiev, Seong Lee, Guanglian Li, Jun Yao, Na Zhang.* Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method // GEM-Internat. J. Geomathematics. 2015. V. 6, N 2. P. 141–162.
6. *Snow D. T.* Rock fracture spacings, openings, and porosities // J. Soil Mech. Found. Div. 1968. N 94. P. 73–92.
7. *Noorishad J., Mehran M.* An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media // Water Resour. Res. 1982. N 18. P. 588–596.
8. *Kim J., Deo M. D.* Comparison of the performance of a discrete fracture multiphase model with those using conventional methods // SPE Symposium on Reservoir Simulation. Huston, 1999. P. 359–371.
9. *Kim J., Deo M. D.* Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // AIChE J. 2000. N 46. P. 1120–1130.
10. *Baca R., Arnett R., Langford D.* Modeling fluid flow in fractured porous rock masses by finite element techniques // Internat. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. N 4. P. 337–348.
11. *Huang Z., Yao J., Wang Y., Tao K.* Numerical study on two-phase flow through fractured porous media // Science China Technological Sciences. 2011. N 54. P. 2412–2420.
12. *Yu-Shu Wu, Qin G., Ewing R.E., Efendiev Y., Kang Z., Ren Y.* A multiple-continuum approach for modeling multiphase flow in naturally fractured vuggy petroleum reservoirs // Internat. Oil and Gas Conf. and Exhibition in China. V. 2. Beijing, 2006. P. 739–750.
13. *Dershowitz W. S., La Pointe P. R., Doe T. W.* Advances in discrete fracture network modeling // Proc. US EPA/NGWA Fractured Rock Conf., 2004. Portland, 2004/ P. 882-894.
14. *Васильев В. И., Васильева М. В., Лаевский Ю. М., Тимофеева Т. С.* Численное моделирование фильтрации двухфазной жидкости в гетерогенных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 33–40.
15. *Karimi-Fard M. M., Firoozabadi A.* Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model // SPE REE J. 2003. N 4. P. 117–126.
16. *Dolean V., Jolivet P., Nataf F.* An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementataion. Philadelphia: SIAM, 2015.
17. *Бутюгин Д. С., Ильин В. П., Перевозкин Д. В.* Методы параллельного решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в библиотеке KRYLOV // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2012. № 47(306), ? вып. 2. С. 22–36. ?!
18. *Бутюгин Д. С., Гурьева Я. Л., Ильин В. П., Перевозкин Д. В., Петухов А. В., Скопин И. Н.* Функциональность и технологии алгебраических решателей в библиотеке KRYLOV // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2013. Т. 2, № 3. С. 92–105.? ?!
19. *Ильин В. П.* О методах неполной факторизации для решения параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 6. С. 1304–1308.

20. *Langtangen H. P, Logg A.* Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial. V. I. Springer-Verl., 2016.
21. *Li J., Lei Z., Qin G., Gong B.* Effective local-global upscaling of fractured reservoirs under discrete fractured discretization // Energies. 2015. V. 8, N 9. P. 10178–10197.
22. *Geuzaine C., Remacle J.-F.* Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built in pre- and post-processing facilities // Internat. J. Numer. Methods in Engrg. 2009. V. 79, N 11. P. 1309–1331.
23. *http://chpc.ru/about/clusters/ ?* ?!
24. *Vincent M., Jaffré J., Roberts J. E.* Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media // SIAM J. Scientific Computing. 2005. V. 26, N 5. P. 1667–1691.
25. *Yao J., Huang Z., Li Y., Wang C., Lv X.* Discrete fracture-vug network model for modeling fluid flow in fractured vuggy porous media // Internat. Oil and Gas Conf. and Exhibition in China. Beijing: Society of Petroleum Engineers, 2010. P. 320–333.
26. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M.* Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media // Comput. Geosciences. 2016. V. 20, № 5. P. 953–973.
27. *Vasilyeva M., Chung E. T., Leung W. T., Alekseev V.* Nonlocal multicontinuum (NLMC) upscaling of mixed dimensional coupled flow problem for embedded and discrete fracture models // arXiv preprint arXiv:1805.09407, 2018.
28. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y.* Multiscale model reduction for shale gas transport in poroelastic fractured media // J. Comput. Physics. 2018. N 353. P. 356–376.
29. *Bukac M., Yotov I., Zunino P.* Dimensional model reduction for flow through fractures in poroelastic media // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2017. V. 51, Issue 4. P. 1429–1471.
30. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. SIAM, 2006.

Статья поступила 18 июня 2018 г.

Васильев Василий Иванович
Васильева Мария Васильевна
Никифоров Дьулустан Яковлевич
Прокопьев Георгий Анатольевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
ул. Белинского, 58
677000 г. Якутск
Ильин Валерий Павлович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
просп. Лаврентьева, 6
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
630090 г. Новосибирск
Гладких Виктор Сергеевич
Перевозкин Данил Валерьевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
E-mail: vasvasil@mail.ru; vasilyevadotmdotv@gmail.com; gladvs_ru@mail.ru; dju92@mail.ru; foxillys@gmail.com; khloros35@gmail.com