

УДК 53.082.531, 53.082.532, 519.6

## РАСЧЁТ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА БРЭГГОВСКОЙ РЕШЁТКЕ РЕКУРСИЕЙ ТРАНСФЕР-МАТРИЦ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ\*

© Н. И. Горбенко<sup>1,2</sup>, В. П. Ильин<sup>1,2</sup>, Л. Л. Фрумин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2*

<sup>3</sup> *Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1*

*E-mail: ilin@sscc.ru*

Рассмотрена прямая задача рассеяния света для волоконно-оптической брэгговской решётки. Обсуждались постановка и решение задачи на основе метода трансфер-матриц. Предложен вариант метода, сводящийся к удобному для вычислений универсальному рекуррентному алгоритму, аналогичному алгоритму прогонки. В приближении связанных мод методом конечных объёмов рассчитаны элементы трансфер-матриц с третьим локальным порядком точности аппроксимации на неравномерной расчётной сетке по координате. Рекуррентным алгоритмом проведены численные расчёты прямой задачи рассеяния для случая брэгговской решётки с аподизацией и нелинейным чирпом. Численным моделированием подтверждено значительное повышение точности расчётов решения задачи рассеяния на неравномерной сетке.

*Ключевые слова:* волоконная брэгговская решётка, задача рассеяния, метод трансфер-матриц, рекуррентный алгоритм, неравномерная сетка.

DOI: 10.15372/AUT20190106

**Введение.** В настоящее время по волоконно-оптическим линиям связи (ВОЛС) во всём мире передаётся более 90 % информации. Успех ВОЛС как мощного современного средства коммуникации обусловлен сочетанием целого ряда научных и технологических факторов: высокой прозрачностью волоконного кварцевого стекла и качеством эрбиевых усилителей, а также широким применением волоконно-оптических брэгговских решёток (ВБР) [1–3]. ВБР практически являются неотъемлемой частью ВОЛС. Они служат оптическими эквалайзерами, (де-) мультиплексорами, фильтрами и компенсаторами частотной дисперсии волокон [4]. С повышением скорости передачи информации частотная дисперсия растёт, поэтому расчёт частотной и импульсной характеристик компенсатора дисперсии становится всё более актуальной задачей. В основном этот расчёт сводится к решению прямой задачи рассеяния света на ВБР. Отметим, что одновременный учёт дисперсии и нелинейных (керровских) искажений в оптической линии также приводит к задачам рассеяния света [5].

Наряду с оптическими линиями связи брэгговские решётки находят применение в современных оптических измерительных системах (датчиках и сенсорах, включая биосенсоры, распределённых измерительных системах), а также в волоконно-оптических лазерах [6–8]. В последние годы были разработаны различные решётки со сложными структурами:

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант N 14-11-00485П и частично грант № 17-72-30006).

решётки с аподизацией и чирпом, длиннопериодные и наклонные, с внутренней структурой, объединяющие несколько решёток, каскадные [9]. Взрывной рост научных и технологических приложений ВБР стимулировал развитие методов решения задач рассеяния.

Одним из наиболее известных подходов к решению прямой задачи рассеяния является метод трансфер-матриц (матриц переноса) (МТМ) [10]. Он широко используется в оптике для расчёта лазерных зеркал, оптических фильтров, просветлённой оптики, а также в электромагнитном и акустическом зондировании и их технологических приложениях. Этот метод признан одним из лучших для решения прямой задачи рассеяния [11], однако в зависимости от реализации он может быть неустойчивым [12, 13]. Варианты МТМ разработаны не только для дискретных, но и для различных непрерывных волновых систем, включая квантовые, описываемых уравнениями Гельмгольца, Шрёдингера и уравнениями связанных мод Когельника [14]. Последние, более известные как система уравнений Захарова — Шабата [15], используются для описания рассеяния волн в брэгговских решётках. Во всех перечисленных случаях непрерывная решётка тем или иным способом дискретизируется, т. е. аппроксимируется дискретной слоистой средой, состоящей из  $N$  слоёв. Вектор-столбец волновых амплитуд  $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n)^\top$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , (символ  $\top$  в показателе степени обозначает транспонирование), составленный из амплитуд падающей  $u_n$  и отражённой  $v_n$  волн на границах такого слоя с номером  $n$ , определяется трансфер-матрицей слоя  $\mathbf{T}_n$ :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{T}_n \mathbf{u}_{n+1}, \quad (1)$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}^{(n)} & \tau_{12}^{(n)} \\ \tau_{21}^{(n)} & \tau_{22}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оптические приложения МТМ в значительной мере обусловлены линейным характером частотной дисперсии сред в оптическом диапазоне частот [16]. Поэтому элементы трансфер-матрицы  $\tau_{ij}^{(n)}$  являются величинами, зависящими от оптической частоты волны. Метод позволяет рассчитывать спектры отражения и пропускания решётки как целого, связывая входные и выходные векторы волновых амплитуд путём перемножения трансфер-матриц его слоёв.

Трансфер-матрицы определяются способом дискретизации исходных уравнений задачи. Обычно МТМ используется в простейшем и самом грубом варианте дискретизации, когда слои решётки считаются однородными. Точность аппроксимации элементов трансфер-матриц в этом случае оценивается как  $O(N^{-1})$ , т. е. имеет первый глобальный порядок точности аппроксимации. Расчёт оптических спектров с помощью схем с таким низким порядком точности может представлять собой непростую вычислительную задачу в случае повышенных требований к точности расчётов. Рассмотрим, к примеру, задачи, возникающие при расчёте спектров ВБР в оптических сетях. Современные цифровые ВОЛС при передаче информации достигают точности (вероятности ошибки) на уровне  $10^{-9}$ . Такая высокая точность получается при применении специальных цифровых кодов, корректирующих ошибки [17]. Однако сами эти коды требуют точности входной информации на уровне  $10^{-5}$ . Для решения задач рассеяния с первым порядком аппроксимации для указанной точности расчётов потребуется численный алгоритм, содержащий  $N \sim 10^5$  расчётных точек. Расчёт спектра, имеющего сравнимое с  $N$  число спектральных компонент, с помощью умножения матриц по схеме МТМ потребует почти  $10^{11}$  плавающих арифметических операций. Другим примером задачи с относительно большим объёмом

вычислений служит расчёт каскадных ВБР [18], в спектре пропускания которых формируется тонкая структура, требующая высокой точности измерений и вычислений — шаг расчётов спектра по длине волны достигает 5 пикометров.

В данной работе предлагается уменьшить число расчётных точек и объём вычислений спектров ВБР на основе численных схем более высокого порядка аппроксимации, сохранив при этом высокую точность расчётов. Более точная аппроксимация ВБР достигается в случае аппроксимации её неоднородными слоями, свойства которых меняются полиномиально. Чем выше степень полинома, тем больше порядок аппроксимации и тем меньше размер расчётной сетки и объём вычислений при фиксированной точности. Уже для второго глобального порядка точности, когда ошибка (погрешность) аппроксимации оценивается как  $O(N^{-2})$ , число расчётных точек и трудоёмкость задачи многократно снижаются. Алгоритм решения задачи рассеяния состоит из  $N$  шагов, каждый из которых характеризуется так называемой локальной ошибкой аппроксимации. Глобальная погрешность алгоритма складывается из суммы локальных. Для равномерной сетки второй глобальный порядок аппроксимации соответствует третьему локальному порядку точности аппроксимации. В зависимости от выбранного способа дискретизации повышение порядка аппроксимации может значительно осложнить схему МТМ. Например, при использовании метода конечных разностей для дискретизации уравнений может появиться добавка в уравнении (1), содержащая  $\mathbf{u}_{n-1}$ , или возрасти размерность трансфер-матриц. Чтобы избежать этих проблем, авторы выбрали для дискретизации задачи метод конечных объёмов [19], который позволяет поднять порядок аппроксимации, оставаясь в рамках схемы МТМ.

Для ВБР был разработан эффективный (быстрый и точный) алгоритм решения прямой задачи рассеяния [20], основанный на обращении решения обратной задачи рассеяния, полученного методом теплицева внутреннего обрамления (ТВО) [20, 21]. Метод ТВО имеет второй глобальный порядок точности аппроксимации и является одним из наиболее устойчивых алгоритмов решения как прямой, так и обратной задачи рассеяния на равномерной сетке. Однако для решётки с сильной аподизацией, когда модуляция показателя преломления решётки имеет заметную амплитуду не на всей решётке, а только на ограниченном её участке, прямая задача рассеяния может стать неэкономичной из-за роста ошибок аппроксимации. Для повышения качества аппроксимации в работе используется расчётная сетка с переменным шагом, сгущающаяся на участках быстрого изменения функции аподизации.

В работе предложен универсальный рекуррентный алгоритм МТМ для решения прямой задачи рассеяния, аналогичный алгоритму прогонки [22], более быстрый и удобный (менее громоздкий), чем формальный матричный алгоритм МТМ.

Целью данного исследования является разработка методов решения прямой задачи рассеяния света на ВБР с высоким порядком точности аппроксимации на расчётных сетках с переменным шагом на основе предложенного рекуррентного алгоритма.

В последующих разделах представлены результаты численного моделирования ВБР с аподизацией и нелинейным чирпом (нелинейным изменением частоты вдоль решётки). Для верификации расчётов используется точное аналитическое решение уравнений связанных мод [23] с аподизацией в виде гиперболического секанса, которое часто используется для тестирования численных алгоритмов решения задачи рассеяния (см., например, [24, 25]).

**Постановка задач рассеяния.** Рассмотрим дискретный брэгговский отражатель (решётку), схематично представленный на рис. 1, состоящий из  $N$  слоёв, характеризуемых зависящими от частоты световой волны трансфер-матрицами  $\mathbf{T}_n$ . Прямая левая задача рассеяния представляет собой двухточечную краевую задачу. Первое граничное условие состоит в том, что на левом краю задана амплитуда падающей слева на решётку волны  $u_0$ . Ещё одним условием задачи является отсутствие волны, падающей на неё справа:  $v_N = 0$ .

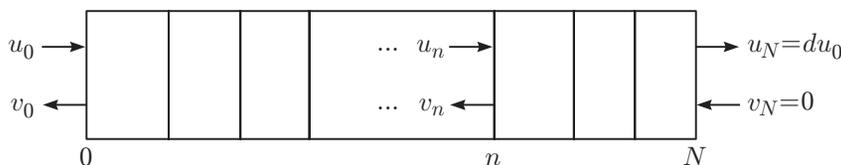


Рис. 1. Дискретный брэгговский отражатель (решётка)

Требуется найти комплексные коэффициенты отражения  $r_0$  и пропускания  $d$ :

$$r_0 = v_0/u_0, \quad d = u_N/u_0, \quad (3)$$

где  $v_0$ ,  $u_N$  — амплитуды отражённой от решётки и прошедшей через неё волн соответственно. В более узкой постановке задачи рассеяния требуется рассчитать только один коэффициент  $r_0$  для всех компонент спектра отражения решётки.

**Метод трансфер-матриц.** Решение задачи рассеяния методом трансфер-матриц с учётом линейности начинается с того, что все амплитуды волн ( $u_k$ ,  $v_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ) делятся на неизвестный коэффициент пропускания  $d$ . При этом неизвестный вектор  $\mathbf{u}_N \equiv (u_N, v_N)^\top = (d, 0)^\top$  переходит в вектор  $\tilde{\mathbf{u}}_N = \mathbf{u}_N/d = (1, 0)^\top$ . Таким элегантным приёмом двухточечная краевая задача сводится к более простой задаче Коши [24]. Умножая

$\tilde{\mathbf{u}}_N$  на последовательное произведение  $N$  трансфер-матриц  $\prod_0^{N-1} T_n$ , можно найти вектор

$\tilde{\mathbf{u}}_0 = (u_0/d, v_0/d)^\top$  и затем по формуле (3) вычислить коэффициент отражения решётки  $r_0 = (v_0/d)/(u_0/d)$ . Непосредственная оценка объёма вычислений для произведения  $N$  трансфер-матриц размером  $2 \times 2$  и умножения результирующей матрицы на вектор показывает, что для этого требуется  $12(N-1) + 6 = 12N - 6$  арифметических операций. Почти вдвое меньшее число ( $6N$ ) операций требуется, если последовательно умножать трансфер-матрицы на вектор, полученный в результате предыдущего умножения, начиная с вектора  $\tilde{\mathbf{u}}_N = (1, 0)^\top$ . Таким образом, для расчёта одной спектральной компоненты спектра отражения потребуется  $N$  последовательных умножений матрицы на вектор. Для вычисления импульсного отклика решётки с помощью дискретного (быстрого) обратного преобразования Фурье необходимо рассчитать спектр отражения, соответствующий  $M$  эквидистантным спектральным компонентам коэффициента отражения. Для этого потребуется  $M$  раз применить МТМ. Число арифметических операций составит  $\sim 6NM$ .

Объём вычислений можно уменьшить, а сами расчёты упростить с помощью рекуррентного алгоритма, аналогичного прогонке. Рассмотрим левую границу слоя с номером  $k$ . Если вектор волновых амплитуд на этой границе  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  умножить на матрицу

$$\mathbf{R}_k = \prod_{n=k}^{N-1} \mathbf{T}_n^{-1}, \quad (4)$$

состоящую из произведения обратных трансфер-матриц последующих слоёв, то получим исходный вектор  $\tilde{\mathbf{u}}_N = (1, 0)^\top$ :

$$\tilde{\mathbf{u}}_N = \mathbf{R}_k \tilde{\mathbf{u}}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

Пусть в (4) матрица имеет вид  $\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} \theta_{11}^{(k)} & \theta_{12}^{(k)} \\ \theta_{21}^{(k)} & \theta_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$ . Так как нижняя компонента вектора

$\tilde{\mathbf{u}}_N = (1, 0)^\top$  равна нулю, из (4) следует

$$\theta_{21}^{(k)} \tilde{u}_k + \theta_{22}^{(k)} \tilde{v}_k = 0. \quad (6)$$

В результате мы установили линейную рекуррентную связь между амплитудами падающей и отражённой волн на произвольной  $k$ -й границе:

$$\tilde{v}_k = r_k \tilde{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7)$$

Безразмерный коэффициент  $r_k = \tilde{v}_k / \tilde{u}_k$  представляет собой локальный коэффициент отражения. Пользуясь уравнением (6),  $r_k$  можно представить в виде

$$r_k = -\theta_{21}^{(k)} / \theta_{22}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (8)$$

Матрицы  $\mathbf{R}_{k-1}$  и  $\mathbf{R}_k$  связаны соотношением  $\mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{R}_k$ . Введём обозначения для элементов обратной матрицы:  $\mathbf{T}_k^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(k)} & t_{12}^{(k)} \\ t_{21}^{(k)} & t_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$ . Из уравнения (8) следует:

$$\theta_{21}^{(k-1)} = \theta_{21}^{(k)} t_{11}^{(k)} + \theta_{22}^{(k)} t_{21}^{(k)}, \quad (9)$$

$$\theta_{22}^{(k-1)} = \theta_{21}^{(k)} t_{12}^{(k)} + \theta_{22}^{(k)} t_{22}^{(k)}. \quad (10)$$

С помощью (8)–(10) находим рекуррентное соотношение для коэффициентов отражения, подобное выражению для коэффициента прогонки:

$$r_{k-1} = -\frac{\theta_{21}^{(k-1)}}{\theta_{22}^{(k-1)}} = \frac{r_k t_{11}^{(k)} - t_{21}^{(k)}}{t_{22}^{(k)} - r_k t_{12}^{(k)}}, \quad k = N, N - 1, \dots, 1, \quad r_N = 0. \quad (11)$$

Эта формула примечательна тем, что не требует вычисления амплитуд волн и умножения матриц для решения задачи рассеяния. Расчёт начинается со значения  $r_N = v_N / u_0 = 0$ , затем по формуле (11) находятся  $r_{N-1}$ ,  $r_{N-2}$  и так далее, пока не будет найден коэффициент отражения  $r_0$ . Для расчёта одной спектральной компоненты спектра отражения потребуется всего  $5N$  арифметических операций. Отметим также сходство алгоритма с известным рекуррентным алгоритмом из [26] для уравнения Гельмгольца, основанным на формулах Френеля.

В случае, когда нужно найти коэффициент пропускания  $d$ , выполняется «обратный ход» вычислений по аналогии с алгоритмом прогонки на основе формулы (7). Он заключается в последовательном вычислении:

$$u_0 = 1, \quad v_0 = r_0, \quad r_N = 0, \quad u_{k+1} = \tau_{11}^{(k)} u_k + \tau_{12}^{(k)} v_k = \beta_k u_k,$$

$$\beta_k = \tau_{11}^{(k)} + r_k \tau_{12}^{(k)}, \quad v_{k+1} = r_{k+1} u_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Здесь  $\tau_{ij}^{(k)}$  — элементы матрицы  $\mathbf{T}_k$ .

**Метод конечных объёмов для системы Захарова — Шабата.** Рассмотрим алгоритм расчёта трансфер-матриц, возникающих при численной дискретизации ВБР, основанный на методе конечных объёмов, который позволяет повысить порядок аппроксимации задачи для расчётных сеток с переменным шагом. Для решения задачи рассеяния применяется представленный выше рекуррентный алгоритм расчёта коэффициента отражения (11).

ВБР представляет собой оптическое волокно длиной  $L$  с периодической синусоидальной модуляцией  $\delta n$  показателя преломления  $n$ :  $\delta n/n = 2\alpha(x) \cos(\varkappa x + \theta(x))$ , где  $x$  — координата вдоль волокна,  $\varkappa$  — пространственная частота модуляции решётки,  $\alpha(x)$  — функция аподизации,  $\theta(x)$  — фаза модуляции. Предполагается, что модуляция является неглубокой и медленной:

$$\alpha(x) \ll 1, \quad \alpha'(x) \ll \varkappa, \quad \theta'(x) \ll \varkappa. \quad (12)$$

Штрихи в (12) обозначают дифференцирование по координате  $x$ . Неравенства (12) представляют собой условия применимости резонансного приближения связанных мод. Резонансная пространственная частота  $k_0$  однородной решётки (решётки с постоянными  $\alpha$ ,  $\theta$ ) равна  $k_0 = \varkappa/2$ . В этом приближении ВБР характеризуется комплексным коэффициентом связи мод  $q(x) = i\alpha(x)k_0 \exp(-i\theta(x))$ ,  $i$  — здесь и далее мнимая единица. Предполагается, что отстройка  $\omega = k - k_0$  пространственной частоты  $k$  световой волны в решётке от резонансной мала в сравнении с резонансной частотой.

Модуль спектра отражения однородной решётки, кроме основного максимума, ширина которого пропорциональна основной частоте и глубине модуляции, содержит также заметные побочные максимумы (риплы). Чтобы их уменьшить, при изготовлении решётки используется гладкая спадающая на краях функция аподизации  $\alpha(x)$ . Аподизация позволяет управлять спектром отражения решётки. В свою очередь, линейная модуляция фазы  $\theta(x)$  сдвигает частоту основного тона, а её нелинейная модуляция приводит к изменению частоты вдоль решётки (это называется чирп). Спектр отражения такой неоднородной решётки с заданными  $\alpha(x)$  и  $\theta(x)$  находится путём численного решения прямых задач рассеяния для каждой спектральной компоненты.

Для ВБР с нормальным законом дисперсии (когда показатель преломления  $n$  растёт с частотой) и в приближении связанных мод амплитуды падающей  $u(x)$  и отражённой  $v(x)$  волн описываются системой уравнений Захарова — Шабата

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\omega & -q(x) \\ -q^*(x) & -i\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (13)$$

где  $q(x)$  — комплексный коэффициент связи мод, а астериск — комплексное сопряжение.

В основе метода конечных объёмов [19] лежит сведение исходных дифференциальных уравнений к интегральному виду в процессе дискретизации. Многие задачи математической физики могут быть представлены в интегральном виде с помощью законов сохранения или прямого интегрирования дифференциальных уравнений. Интегральная форма лучше подходит для дискретизации задачи с помощью квадратурных формул для численного интегрирования. Её основное преимущество заключается в меньших требованиях к гладкости решения при дискретной аппроксимации задачи. Метод конечных объёмов позволяет повысить точность аппроксимации уравнений, оставаясь в рамках МТМ с матрицами размером  $2 \times 2$ . Перепишем систему (13) в виде

$$e^{-i\omega x} \frac{d}{dx} (e^{i\omega x} u) = qv, \quad e^{i\omega x} \frac{d}{dx} (e^{-i\omega x} v) = q^*u. \quad (14)$$

Система уравнений (14) рассматривается на отрезке  $[-L/2, L/2]$ , где  $L$  — размер (длина) решётки. Определим на этом отрезке неравномерную расчётную сетку с узлами в точках  $-L/2 = x_0, x_1, \dots, x_N = L/2$  и проинтегрируем систему на интервале  $[x_n, x_{n+1}]$ :

$$e^{i\omega x_{n+1}} u_{n+1} - e^{i\omega x_n} u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{i\omega x} qv dx, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$e^{-i\omega x_{n+1}} v_{n+1} - e^{-i\omega x_n} v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-i\omega x} q^* u dx. \quad (15)$$

Заменим интегралы в (15) по формуле трапеций с третьим локальным порядком аппроксимации  $O(h_n^3)$  и в матричном виде получим

$$\begin{bmatrix} 1 & -h_n q_{n+1} \\ -h_n q_{n+1}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\omega h_n} & h_n q_n e^{-2i\omega h_n} \\ h_n q_n^* e^{2i\omega h_n} & e^{2i\omega h_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Здесь  $h_n = (x_{n+1} - x_n)/2$  — полушаг расчётной сетки.

Обратной к матрице  $\begin{bmatrix} 1 & -h_n q_{n+1} \\ -h_n q_{n+1}^* & 1 \end{bmatrix}$  является матрица  $\frac{1}{1 - h_n^2 |q_{n+1}^2|} \begin{bmatrix} 1 & h_n q_{n+1} \\ h_n q_{n+1}^* & 1 \end{bmatrix}$ . Умножив слева уравнение (16) на эту обратную матрицу, систему (16) можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_n^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - h_n^2 |q_{n+1}^2|} \begin{bmatrix} e^{-2i\omega h_n} + h_n^2 q_n^* q_{n+1} & h_n (q_n e^{-i\omega h_n} + q_{n+1} e^{i\omega h_n}) \\ h_n (q_n^* e^{-2i\omega h_n} + q_{n+1}^* e^{2i\omega h_n}) & e^{2i\omega h_n} + h_n^2 q_n q_{n+1}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Получены формулы для элементов  $t_{ij}^{(n)}$  обратной трансфер-матрицы слоя  $\mathbf{T}_n^{-1}$ , которые используются в рекуррентной расчётной формуле (11). При расчёте элементов обратной трансфер-матрицы множитель  $1/(1 - h_n^2 |q_{n+1}^2|)$  в (17) можно опустить, так как в рекуррентный алгоритм (11) входит только отношение элементов матрицы. В случае однородной решётки, представляющей методический интерес, для равномерной сетки с полушагом  $h$  обратная трансфер-матрица (без множителя) имеет следующий вид:

$$\mathbf{T}_n^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2i\omega h} + h^2 |q|^2 & 2hq \cos(\omega h) \\ 2hq^* \cos(\omega h) & e^{2i\omega h} + h^2 |q|^2 \end{bmatrix}.$$

Система (17) аппроксимирует уравнения Захарова — Шабата с третьим локальным порядком аппроксимации для переменного шага сетки. Аналогичную трансфер-матрицу нетрудно получить и для случая оптических волокон с аномальной дисперсией, когда показатель преломления падает с ростом частоты света.

**Расчёт ВБР с чирпом и аподизацией.** Среди разнообразных ВБР особое место занимают чирпованные решётки, т. е. решётки с меняющейся частотой основного тона, а также решётки с сильной аподизацией, у которых заметна модуляция показателя преломления, когда функция аподизации  $\alpha(x)$  отлична от нуля не на всей решётке, а только на её части. Поэтому для численной апробации предложенных подходов было выбрано точное аналитическое решение [21] системы Захарова и Шабата. Описывающий это решение комплексный коэффициент связи мод  $q(x)$  представляет собой сочетание нелинейного чирпа и аподизации:

$$q(x) = \frac{Q}{\Lambda} \left[ \operatorname{sech} \left( \frac{x}{\Lambda} \right) \right]^{1-2iF}, \quad (18)$$

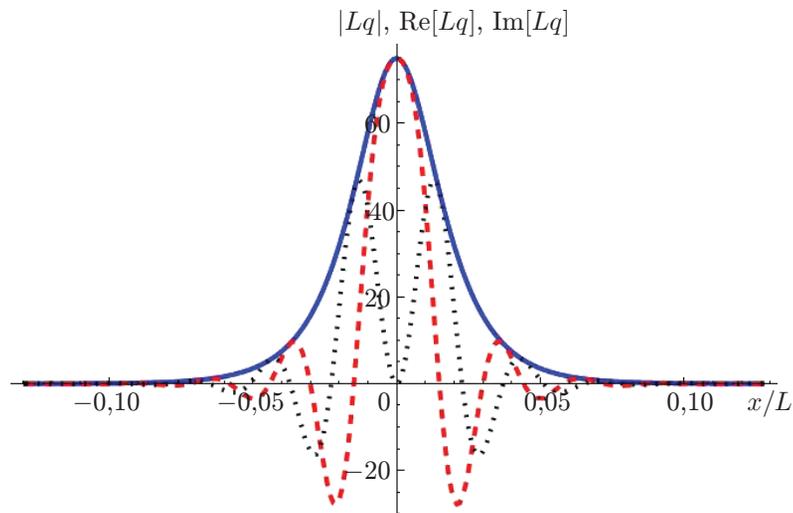


Рис. 2. Модуль (сплошная кривая), реальная (штриховая) и мнимая (пунктирная) части безразмерного произведения длины решётки  $L$  на её коэффициент связи мод  $q$

где  $Q$  — сила решётки,  $F$  — параметр нелинейного чирпа,  $\Lambda$  — полуширина области аподизации. Коэффициент связи мод (18) описывает ВБР с функцией аподизации  $\alpha(x) = \Delta n / (2n) \operatorname{sech}(x/\Lambda)$  и фазовой модуляцией  $\theta(x) = 2F \ln(\operatorname{ch}(x/\Lambda)) - \pi/2$ . Здесь  $\Delta n$  — максимальная амплитуда модуляции показателя преломления  $n$ . Сила решётки  $Q = \varkappa \Lambda \Delta n / 4n$  служит безразмерным параметром, характеризующим решётку. Безразмерный параметр  $F$  отвечает за нелинейный чирп. Пространственная частота модуляции решётки медленно меняется вдоль неё пропорционально  $F$ :  $\varkappa + d\theta/dx = \varkappa + (2F/\Lambda) \operatorname{th}(x/\Lambda)$ .

На рис. 2 представлены безразмерный модуль произведения коэффициента связи мод и длины решётки  $|Lq|$ , его реальная  $\operatorname{Re}[Lq]$  и мнимая  $\operatorname{Im}[Lq]$  части для решётки с чирпом и аподизацией с параметрами  $Q = 1$ ,  $F = 1,5$ ,  $\Lambda/L = 1/75$ . Комплексный спектр отражения решётки имеет вид

$$r(\omega) = -2^{-2iF} Q \frac{\Gamma(d_+) \Gamma(f_-) \Gamma(f_+)}{\Gamma(d_-) \Gamma(g_-) \Gamma(g_+)},$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера, а её аргументы находятся по формулам

$$d_{\pm} = 1/2 \pm i[\omega\Lambda - F], \quad f_{\pm} = 1/2 - i[\omega\Lambda \pm S], \quad g_{\pm} = 1/2 - i[F \pm S].$$

Здесь  $S = \sqrt{F^2 + Q^2}$ . Квадрат модуля спектра отражения решётки описывается элементарными функциями  $|r(\omega)|^2 = (\operatorname{ch}(2\pi S) - \operatorname{ch}(2\pi F)) / (\operatorname{ch}(2\pi S) + \operatorname{ch}(2\pi\omega\Lambda))$ .

На рис. 3 представлен модуль, аргумент спектра отражения  $r(\omega/\omega_{\max})$  брэгговской решётки с аподизацией и чирпом и модуль относительной ошибки восстановления комплексного спектра для случая неравномерной сетки, умноженный на 100, с параметрами  $Q = 1$ ,  $F = 1,5$ ,  $\Lambda = 1/75$ . По оси абсцисс отложена относительная частота  $\omega/\omega_{\max}$ , где  $\omega_{\max} = \pi N/2$  — максимальная полуширина спектра. На рисунке приведён аргумент, делённый для масштаба на  $2\pi$ . В ходе расчётов размер решётки принят  $L = 1$ , размер расчётной сетки  $N = 1000$ , а число спектральных компонент выбрано  $M = N$ . Расчёты проводились на равномерной сетке с размером полушага  $h = 0,0005$ , а также на неравномерной сетке с четырёхкратным сгущением в центральном интервале номеров точек от 250 до 750, где профиль решётки претерпевает наибольшие изменения. Подчеркнём, что

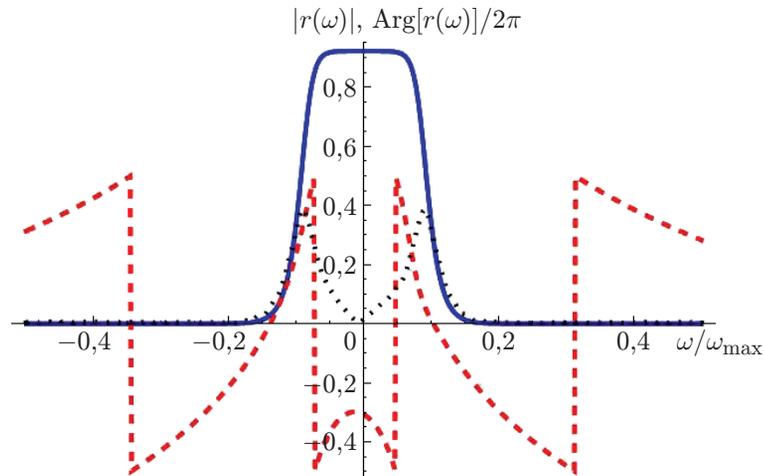


Рис. 3. Модуль (сплошная кривая), аргумент (поделён на  $2\pi$ , штриховая кривая) точного спектра отражения для брэгговской решётки с чирпом и аподизацией и относительная ошибка восстановления спектра отражения на неравномерной сетке (пунктирная кривая)

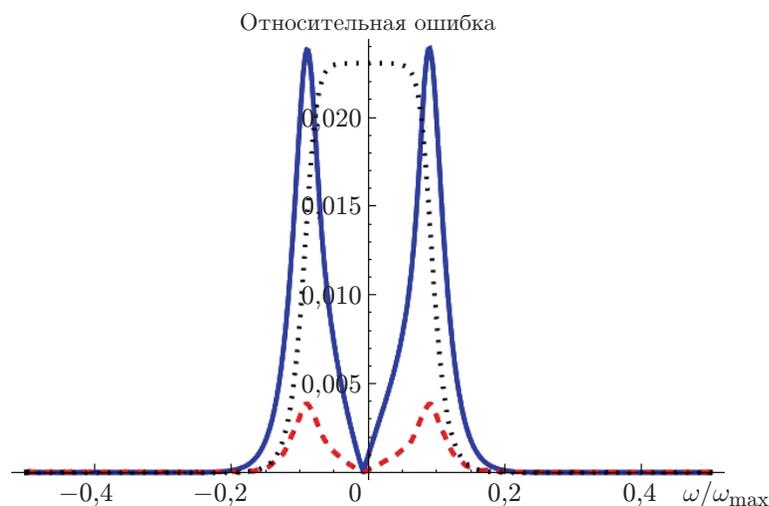


Рис. 4. Относительная ошибка восстановления спектра отражения ВБР для равномерной (сплошная кривая) и неравномерной (штриховая кривая) расчётных сеток равного размера ( $N = 1000$ ), модуль спектра  $|r(\omega)|$ , уменьшенный в 40 раз, показан пунктирной кривой

размер  $N$  неравномерной сетки выбран тот же ( $N = 1000$ ), что и для равномерной. Полушаг неравномерной сетки в центральном интервале был меньше, чем для равномерной, и составлял 0,0002, а на краях сетки, где функция практически не менялась, полушаг был в четыре раза больше, чем в центре (0,0008). Расчёты в целом подтвердили робастность предложенного подхода. Сравнение погрешности (евклидовой нормы ошибки) восстановления спектра показало, что точность расчёта на неравномерной сетке более чем в 6 раз превысила точность расчётов на равномерной сетке.

Расчёты для решётки без чирпа ( $F = 0$ ) также выявили заметный рост точности при сгущении сетки вблизи центральной области решётки, где функция аподизации меняется быстро.

На рис. 4 представлено сравнение распределений погрешности восстановления спектра отражения ВБР на равномерной и неравномерной сетках при фиксированном размере сетки  $N = 1000$ . Видно, что ошибка восстановления для неравномерной сетки значительно меньше, чем в случае равномерной. Заметим, наконец, что точность расчёта комплексного спектра отражения при переходе от равномерной сетки размером  $N = 1000$  к сетке с  $N = 2000$  возрастает почти точно в 4 раза, т. е. демонстрирует второй глобальный порядок точности аппроксимации.

**Заключение.** В данной работе рассмотрена модификация метода трансфер-матриц для решения прямой задачи рассеяния на брэгговском отражателе. Показано, что этот метод может быть реализован с помощью простого и экономичного рекуррентного алгоритма, схожего с алгоритмом прогонки. Для волоконной брэгговской решётки в приближении связанных мод методом конечных объёмов предложен метод расчёта элементов трансфер-матриц с третьим локальным порядком аппроксимации на неравномерной расчётной сетке по координате. В рамках метода трансфер-матриц рекуррентным алгоритмом проведены численные расчёты задачи рассеяния для случая брэгговской решётки с сильной аподизацией и нелинейным чирпом. Сравнение расчётов на равномерной и неравномерной сетках с точным аналитическим решением показало рост точности расчётов в 6 раз при четырёхкратном сгущении сетки в области больших вариаций решения. Предложенный подход планируется использовать для расчёта сложных ВБР, а также для одновременного учёта нелинейных и дисперсионных искажений информационного сигнала в волоконно-оптических линиях связи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кульчин Ю. Н.** Распределенные волоконно-оптические системы. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
2. **Kashyap R.** Fiber Bragg Gratings. N. Y.: Academic Press, 1999. 458 p.
3. **Васильев С. А., Медведков О. И., Королев И. Г. и др.** Волоконные решетки показателя преломления и их применения // Квантовая электроника. 2005. **35**, № 12. С. 1085–1103.
4. **Mollenauer L. F., Gordon J.** Solitons in Optical Fiber. N. Y.: Academic Press, 2006. 280 p.
5. **Turitsyn S. K., Prilepsky J. E., Le S. T. et al.** Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: Advances and perspectives // Optica. 2017. **4**, N 3. P. 307–322.
6. **Canning J.** Fiber gratings and devices for sensors and lasers // Lasers and Photon. Rev. 2008. **2**, N 4. P. 275–289.
7. **Бабин С. А., Власов А. А., Каблуков С. И., Шелемба И. С.** Сенсорная система на основе волоконно-оптических брэгговских решеток // Вестн. НГУ. Сер. Физика. 2007. № 2, вып. 3. С. 54–57.
8. **Tosi D.** Review of Chirped Fiber Bragg Grating (CFBG) fiber-optic sensors and their applications // Sensors. 2018. **18**, N 7. P. 2147–2178.
9. **Иванов О. В., Никитов О. В., Гуляев Ю. В.** Оболочечные моды волоконных световодов, их свойства и применение // УФН. 2006. **176**, № 2. С. 175–202.
10. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1977. 720 с.
11. **Burtsev S., Camassa R., Timofeyev I.** Numerical algorithms for the direct spectral transform with applications to nonlinear Schrödinger type systems // Journ. Comp. Phys. 1998. **147**, N 1. P. 166–186.
12. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
13. **Pernas-Salomon R., Perez-Alvarez R.** Sturm-Liouville matrix equation for the study of electromagnetic-waves propagation in layered anisotropic media // Progress In Electromagnetics Research M. 2014. **40**. P. 79–90.

14. **Kogelnik H.** Coupled wave theory for thick hologram gratings // Bell Syst. Tech. Journ. 1969. **48**, N 9. P. 2909–2947.
15. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.** Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. **61**, вып. 1. С. 118–134.
16. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.
17. **Huffman W. S., Pless V. S.** Fundamentals of Error-Correcting Codes. N. Y.: Cambridge University Press. 2003. 668 p.
18. **Пен Е. Ф., Родионов М. Ю., Чубаков П. А.** Спектральные свойства каскада голографических отражательных решёток, разделённых однородным слоем // Автометрия. 2017. **53**, № 1. С. 73–82.
19. **Ильин В. П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, 2001. 318 с.
20. **Frumin L. L., Belai O. V., Podivilov E. V., Shapiro D. A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov-Shabat scattering problem // JOSA B. 2015. **32**, N 2. P. 290–295.
21. **Belai O. V., Frumin L. L., Podivilov E. V., Shapiro D. A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov-Shabat scattering problem // JOSA B. 2007. **24**, N 7. P. 1451–1457.
22. **Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.** Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 207 с.
23. **Podivilov E. V., Shapiro D. A., Trubitsyn D. A.** Exactly solvable profiles of quasi-rectangular Bragg filter with dispersion compensation // Journ. Opt. A: Pure and Appl. Opt. 2006. **8**, N 9. P. 788–795.
24. **Белай О. В., Подивиллов Е. В., Фрумин Л. Л., Шапиро Д. А.** Устойчивость численного восстановления волоконных брэгговских решеток // Оптика и спектроскопия. 2008. **105**, № 1. С. 114–121.
25. **Белай О. В., Подивиллов Е. В., Фрумин Л. Л., Шапиро Д. А.** Обратная задача рассеяния для одномерного волнового уравнения // Автометрия. 2009. **45**, № 6. С. 69–77.
26. **Parratt L. G.** Surface studies of solids by total reflection of X-rays // Phys. Rev. 1954. **95**, N 2. P. 359–369.

*Поступила в редакцию 22.10.2018*

*После доработки 06.12.2018*

*Принята к публикации 10.12.2018*

---