

УДК 519.61

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ПОПРАВКИ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ КРЫЛОВА© 2025 В. П. Ильин^{1а}, В. Н. Бабенко^{2б}¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН,

просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,

²Кубанский государственный технологический университет,
ул. Московская, 2, г. Краснодар 350072, РоссияE-mails: ^аilin@sscc.ru, ^бrnibvd@mail.ruПоступила в редакцию 26.10.2024 г.; после доработки 12.04.2025 г.;
принята к публикации 21.04.2025 г.

При осуществлении вычислений на ЭВМ неизбежно возникают погрешности округления. В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии указанных погрешностей на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова. Получена оценка точности вычисленной поправки, выраженная через возмущения исходных данных.

Ключевые слова: ортопроектор, подпространство Крылова, проекционный метод, ортогонализация Арнольди, СЛАУ большой размерности, погрешности округлений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.1

ВВЕДЕНИЕ

Пусть задана СЛАУ

$$Ax = f, \quad (1)$$

где A — невырожденная эрмитова или же неэрмитова матрица порядка N .Если N велико, то обычно при осуществлении решения (1) прибегают к итерационным методам: для произвольного x^0 по формуле

$$x^n = x^{n-1} + y^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

вычисляется последовательность $\{x^n\}$, сходящаяся к точному решению $\bar{x}$ системы (1) (см. [1, 2], а также более современные источники [3, 4]). Поправка y^n определяется решением системы уравнений

$$B_n y^n = r^{n-1}, \quad (2)$$

где $r^{n-1} = f - Ax^{n-1}$ — невязка, порождаемая приближением x^{n-1} , B_n — некоторая невырожденная матрица.

При осуществлении машинных вычислений вследствие погрешностей округлений вместо решений y^n систем (2) мы будем иметь решения $\tilde{y}^n$ возмущённых систем

$$\tilde{B}_n \tilde{y}^n = \tilde{r}^{n-1}.$$

Вследствие этих причин мы получим иную последовательность

$$\tilde{x}^0 = x^0, \quad \tilde{x}^n = \tilde{x}^{n-1} + \tilde{y}^n = \tilde{x}^{n-1} + (y^n + \delta y^n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где δy^n — возмущение поправки y^n . Из последней формулы видно, что если $\tilde{x}^{n-1}$ уже близко к точному решению $\bar{x}$, то актуальным является вопрос о величине оценки возмущения δy^n . Именно по этой причине мы сосредоточили наши усилия на исследовании точности вычисления поправки, не выходя за рамки одной итерации, и поэтому в дальнейшем изложении мы опустим индекс, характеризующий номер итерации.

Переходя от эрмитова пространства к вещественному R^N , мы можем сказать, что если матрица A разреженная, то матрицу B определяют как результат воздействия на матрицу исходной системы ортопроекторами P_K и P_L :

$$B = P_K A P_L, \quad (3)$$

где K и L — выбранные каким-либо образом подпространства в R^N [5–7].

В настоящее время в качестве подпространства K широко применяется так называемое подпространство Крылова, определённое следующим образом. Пусть v — произвольный вектор. Векторы $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ называют последовательностью Крылова, соответственно, $K_m(A, v) = \text{span}(v | Av | \dots | A^{m-1}v)$ — подпространством Крылова, порождаемым матрицей A и вектором v .

Для построения ортонормированного базиса в $K_m(A, v)$ получили широкое применение методы Арнольди (если матрица A несимметрична) и Ланцоша (в противном случае). Пусть x — некоторое приближение точного решения $\bar{x}$ системы (1) и $r = f - Ax$ — соответствующая ему невязка. В выстраиваемой указанными методами ортонормированной системе векторов

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (4)$$

в качестве вектора v_1 принимают нормированный вектор r : $v_1 = \frac{1}{\|r\|}r$, $\|r\| = (r, r)^{1/2}$.

В точной арифметике процедуры этих методов генерируют ортонормированную систему (4) и Хессенбергову матрицу H (или трехдиагональную матрицу T в симметричном случае). Введя обозначение $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_m]$, а также приняв $L = K_m(A, v_1)$ и $P_K = VV^+$, согласно (2) и (3) получим

$$VV^+AVV^+y \cong r, \quad (5)$$

где V^+ — псевдообратная матрица, V^+AV равна указанной выше матрице H (или T). Следует отметить, что в связи с тем, представленное в (5) произведение VV^+ представляет собой ортопроектор, рассматриваемый нами итерационный процесс относят к проекционным методам, интерес к которым не ослабевает уже долгие годы, что подтверждается неуклонно растущим потоком публикаций. Среди них, отметим недавние [8, 9].

Поскольку столбцы матрицы V суть ортонормированные векторы, выполняется равенство $V^+ = V^*$, где V^* — сопряжённая матрица (если элементы матрицы V берутся над полем вещественных чисел, то $V^* = V^T$, где V^T — транспонированная матрица).

Замечание. Далее для обозначения матрицы V^*AV мы будем использовать символ H , имея в виду, что если матрица A симметрична, то $H = T = T^*$. Согласно сказанному вместо (5) мы можем записать

$$VHV^*y \cong r. \quad (6)$$

Отсюда следует

$$\widehat{y} = VH^{-1}V^*r,$$

где $\widehat{y}$ — псевдорешение системы (6). Отметим, что по условию решаемой задачи матрица A системы (1) не вырождена, поэтому не вырождена и матрица $H = V^*AV$. Система уравнений (6) эквивалентна трём системам линейных уравнений

$$Vw \cong r, \quad Hz \cong w, \quad V^*y \cong z, \quad (7)$$

решения которых осуществляются последовательно друг за другом. Из этих трёх систем уравнений вытекают следующие формулы:

$$\widehat{w} = V^* r, \quad z = H^{-1} \widehat{w}, \quad \widehat{y} = Vz, \quad (8)$$

где $\widehat{w}$ — псевдорешение первой системы в (7). Таким образом, обращаясь к последним трём соотношениям, мы видим, что решение системы (6) можно свести к выполнению следующих трёх этапов: вычислению векторов $\widehat{w}$ и z , а также определению поправки $\widehat{y}$ по формулам, приведённым в (8).

При осуществлении вычислений на ЭВМ в результаты выполнения арифметических операций неизбежно вносятся погрешности округления. Вследствие этого вместо псевдорешения $\widehat{y}$ (см. (3)) системы (2) мы получим возмущённое псевдорешение $\widetilde{y}$. Цель нашей работы состоит в исследовании влияния указанных погрешностей на точность возмущённой поправки $\widetilde{y}$. Оно направлено на получение гарантированной оценки точности вычисленной поправки $\widetilde{y}$. Нашей работе ранее предшествовали подобные исследования в [10–12]. Следует также сказать, что исследования, посвящённые определению оценки возмущений матриц V и H , проводились ранее в работах [13–15].

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВКИ

Согласно вышесказанному можно считать, что вместо систем (7) мы решаем системы

$$(V + X_{Vw}) \widetilde{w} \cong (r + \delta r), \quad (9)$$

$$(H + X_{Hz}) \widetilde{z} \cong (\widehat{w} + \delta \widehat{w}), \quad (10)$$

$$(V + X_{Vy})^* \widetilde{y} \cong (z + \delta z). \quad (11)$$

Установим оценки близости псевдорешений рассматриваемых трёх пар исходных и возмущённых систем уравнений, взятых из (7) и (9)–(11). Для достижения этой цели мы будем пользоваться ниже следующей теоремой [16, 17], в которой усилены результаты, полученные ранее в [18, 19].

Рассмотрим исходную СЛАУ общего вида $Ax \cong y$ с матрицей размерности $m \times n$, а также систему $(A + B)u \cong y + v$, полученную из исходной системы возмущением её матрицы и правой части. При этом мы будем придерживаться следующих обозначений: $rk(A) = r$ — ранг матрицы A , $x = \bar{x} + \tilde{x}$, $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{x} \in R(A^*)$, $\tilde{x} \in N(A)$, $\bar{y} \in R(A)$, $\tilde{y} \in N(A^*)$, $R(A^*)$, $N(A)$, $R(A)$, $N(A^*)$ — образы и ядра соответствующих матриц.

Теорема 1. Пусть для систем линейных уравнений

$$Ax \cong y, \quad (A + B)u \cong y + v$$

выполнены соотношения

$$\|B\| \leq \alpha \|A\|, \quad \|v\| \leq \beta \|y\|, \quad 1 - c_r \alpha > 0.$$

Тогда для псевдорешений $\bar{x}$ и $\bar{u}$ исходной и возмущённой систем справедливы следующие утверждения.

1. Если

$$r < \min \{m, n\}, \quad rk(A + B) = r, \quad \|\tilde{y}\| \leq \gamma \|\bar{y}\|, \quad (12)$$

то справедлива оценка

$$\delta = \frac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \max \{M_1, M_2\},$$

где

$$M_1 = \left(\left(\max_{0 \leq \xi \leq 1 - c_r \alpha} \left(\frac{c_r \zeta_r \gamma \sqrt{1 - (\zeta_r + \xi)^2}}{\sqrt{(1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi)^3}} + \frac{\mu_r}{1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi} \right) \right)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\zeta_r = c_r \alpha, \quad M_2 = \left((M_3 \kappa_r)^2 + (c_{r-2} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\mu_r = c_r (\alpha + \beta \sqrt{1 + \gamma^2}), \quad M_3 = c_r c_{r-1} \alpha \gamma + \mu_r, \quad \kappa_r = (1 - c_r \alpha)^{-1}.$$

2. Если $r = m = n$, то

$$\delta \leq c_r (\alpha + \beta) \kappa_r.$$

3. Если выполнено неравенство (12) и $m > n = r$, то

$$\delta \leq \max \{M_4, M_5\}, \quad (13)$$

где

$$M_4 = \frac{c_r^2 \alpha \gamma + \mu_r}{\sqrt{1 - (c_r \alpha)^2}}, \quad (14)$$

$$M_5 = M_3 \kappa_r. \quad (15)$$

4. Если $rk(A + B) = r = m < n$, то

$$\delta \leq \left((c_r (\alpha + \beta) \kappa_r)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь $c_r = \sigma_1 / \sigma_r$, $c_{r-1} = \sigma_1 / \sigma_{r-1}$, $c_{r-2} = \sigma_1 / \sigma_{r-2}$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ — сингулярный спектр матрицы A , причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r > 0$.

С помощью обратного анализа погрешностей округлений, погрешности сводятся к эквивалентным возмущениям исходных данных. В нашем случае — это матрицы V и H , а также векторы r , $\hat{w}$ и z .

Приступая к исследованию процессов накопления погрешностей машинного решения систем уравнений (7), мы должны сделать ряд оговорок. Возмущения X_{Vw} , X_{Hz} , X_{Vy} (см. (9)–(11)) удовлетворяют равенствам

$$X_{Vw} = X_V + X_w, \quad (16)$$

$$X_{Hz} = X_H + X_z, \quad (17)$$

$$X_{Vy} = X_V + X_y, \quad (18)$$

где возмущения X_V и X_H моделируют погрешности, обусловленные неточностью предварительно вычисленных матриц V и H . Соответственно возмущения X_w , X_z и X_y моделируют погрешности, возникающие при непосредственном машинном решении систем уравнений (9)–(11).

Начнём с установления оценки близости псевдорешений первой системы уравнений из списка (7) и системы уравнений (9).

Лемма 1. Пусть в соотношениях (9) и (16) возмущения X_{Vw} , X_V , X_w и δr удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vw}\| \leq \alpha_{V\widehat{w}}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_{\widehat{w}}\| \leq \alpha_{\widehat{w}}, \quad \|\delta r\| \leq \beta_{r+r\widehat{w}} \|r\|, \quad (19)$$

причём

$$\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} = \alpha_V + \alpha_w, \quad 1 - \alpha_{Vw} > 0, \quad 1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}} > 0, \quad \|\widetilde{r}\| \leq \gamma \|\widehat{r}\|, \quad (20)$$

где

$$\widehat{r} + \widetilde{r} = r, \quad \widehat{r} = VV^+r, \quad \widetilde{r} = (I - VV^+)r. \quad (21)$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}, \quad (22)$$

где

$$\gamma_{\widehat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\widehat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} + \beta_{r+r\widehat{w}}\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к теореме 1, мы видим, что рассматриваемые в лемме системы уравнений первые в (7) и (9) отвечают условиям пункта 3 указанной теоремы. Следуя резольвтивной части пункта 3 (см. (13)–(15)) и учитывая при этом, что $\sigma_1(V) = \dots = \sigma_m(V) = 1$ и $\sqrt{1 - (c_r\alpha)^2} > 1 - c_r\alpha$, благодаря соотношениям: первому и четвёртому в (19), первому и третьему в (20), а также (21) — мы можем записать

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}. \quad (23)$$

Используя второе и третье неравенства из списка (19) в равенстве (16), будем иметь

$$\|X_{Vw}\| = \|X_V + X_w\| \leq \|X_V\| + \|X_w\| \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Сопоставляя последнюю цепочку отношений с первым неравенством в (19), приходим к выводу

$$\alpha_{Vw} \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Учитывая первое и третье соотношения в (20), применим последнее неравенство в (23). В результате получим оценку (22). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть в соотношениях (10) и (17) возмущения X_{Hz} , X_H , X_z и $\delta\widetilde{w}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Hz}\| \leq \alpha_{Hz} \|H\|, \quad \|X_H\| \leq \alpha_H \|H\|, \quad \|X_z\| \leq \alpha_z \|H\|, \quad \|\delta\widetilde{w}\| \leq \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z} \|\widehat{w}\|,$$

причём

$$\bar{\alpha}_{Hz} = \alpha_H + \alpha_z, \quad 1 - c(H)\alpha_{Hz} > 0, \quad 1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz} > 0,$$

где $c(H)$ — число обусловленности матрицы H . Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{z} - z\| / \|z\| \leq \frac{c(H) (\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}. \quad (24)$$

Лемма 3. Пусть в соотношениях (11) и (18) возмущения X_{Vy} , X_V , X_y и $\delta\tilde{z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vy}\| \leq \alpha_{Vy}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_y\| \leq \alpha_y, \quad \|\delta\tilde{z}\| \leq \beta_{zy} \|z\|,$$

причём $\bar{\alpha}_{Vy} = \alpha_V + \alpha_y$, $1 - \alpha_{Vy} > 0$ и $1 - \bar{\alpha}_{Vy} > 0$. Тогда

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_{z+zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Доказательства лемм 2 и 3 мы опустили по той причине, что они почти дословно повторяют доказательство леммы 1.

В системах уравнений (9)–(11) возмущения правых частей δr , $\delta\tilde{w}$ и $\delta\tilde{z}$ мы представим в виде суммы двух слагаемых: наследственного возмущения и возмущения, моделирующего погрешности округлений, возникающих непосредственно при выполнении машинного решения обозначенных систем линейных уравнений.

Согласно сказанному запишем

$$\delta r = \delta r_r + \delta r_{r\hat{w}}, \quad \delta\tilde{w} = \delta\tilde{w}_{\hat{w}} + \delta\tilde{w}_{\hat{w}z}, \quad \delta\tilde{z} = \delta\tilde{z}_z + \delta\tilde{z}_{zy}. \quad (26)$$

Предположим, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\delta r_r\| &\leq \beta_r \|r\|, \quad \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq \beta_{r\hat{w}} \|r\|, \\ \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}}\| &\leq \beta_{\hat{w}} \|\hat{w}\|, \quad \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}z}\| \leq \beta_{\hat{w}z} \|\hat{w}\|, \\ \|\delta\tilde{z}_z\| &\leq \beta_z \|z\|, \quad \|\delta\tilde{z}_{zy}\| \leq \beta_{zy} \|z\|. \end{aligned} \quad (27)$$

Обращаясь к первому равенству в (26), благодаря первой паре неравенств в (27) запишем

$$\|\delta r\| \leq \|\delta r_r\| + \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq (\beta_r + \beta_{r\hat{w}}) \|r\|.$$

Сопоставляя последнюю цепочку неравенств с четвёртым неравенством в (19), мы приходим к неравенству

$$\beta_{r+r\hat{w}} \leq \beta_r + \beta_{r\hat{w}}. \quad (28)$$

Совершенно аналогично рассуждая, получаем неравенства

$$\beta_{\hat{w}+\hat{w}z} \leq \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z}, \quad (29)$$

$$\beta_{z+zy} \leq \beta_z + \beta_{zy}. \quad (30)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1–3, тогда справедлива оценка точности вычисления поправки $\hat{y}$

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_z + \beta_{zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}, \quad (31)$$

где

$$\beta_z = \frac{c(H)(\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}, \quad \beta_{\hat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\hat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\hat{w}} + (\beta_r + \beta_{r\hat{w}})\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\hat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к лемме 1, мы видим, что из оценки (22) в силу неравенства (28) вытекает неравенство

$$\left\| \tilde{\hat{w}} - \hat{w} \right\| / \left\| \hat{w} \right\| \leq \beta_{\hat{w}}.$$

В соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. второе равенство) последнее неравенство мы можем записать в виде

$$\left\| \delta \tilde{\hat{w}}_{\hat{w}} \right\| = \left\| \tilde{\hat{w}} - \hat{w} \right\| \leq \beta_{\hat{w}} \left\| \hat{w} \right\|.$$

Обращаясь к оценке (24) леммы 2, благодаря неравенству (29) мы можем записать соотношение

$$\left\| \tilde{z} - z \right\| / \left\| z \right\| \leq \beta_z.$$

Аналогично в соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. третье равенство) последнее неравенство мы перепишем в виде

$$\left\| \delta \tilde{z}_z \right\| = \left\| \tilde{z} - z \right\| \leq \beta_z \left\| z \right\|.$$

Наконец, обращаясь к оценке (25) леммы 3, благодаря неравенству (30) приходим к неравенству (31). Теорема доказана. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Новизна и значение теоремы 2 состоят в следующем.

Доказанная в ней оценка (31) показывает, что более значимое влияние на погрешность машинного вычисления поправки $\hat{y}$ оказывают неточности, допущенные при выполнении 1-го и 2-го этапов: при вычислении матриц V и H , векторов r , $\hat{w}$ и z , а также погрешности, возникающие при осуществлении вычислений, непосредственно использующих указанные матрицы и векторы (они подвергаются усилению числом обусловленности $s(H)$ матрицы Хессенберга H). С погрешностями, допущенными на 3-ем этапе, такого усиления не происходит.

Используемые в нашей работе оценки (теорема 1) не являются завышенными. Они получены на основе исследования оценок, представленных в [18, 19]. В результате этих исследований и появились новые, указанные выше, уточнённые оценки, опубликованные в [16, 17]. Сказанным частично снимается вопрос о практическом значимости оценки (31).

Практическая значимость оценки (31) состоит ещё и в том, что далее она будет применена для установления условий гарантированного уточнения приближения $\tilde{x}^{n-1}$ поправкой $\hat{y}$. В свою очередь, эти условия затем предполагается использовать для прогноза количества требующихся итераций.

Благодаря полученным в теореме 2 результатам мы можем сформулировать вытекающие из них три важные задачи:

- 1) исследование названных источников погрешностей и поиски возможностей снижения их уровня;
- 2) установление условий гарантированного приближения результата очередной итерации к точному решению;
- 3) получение оценки точности вычисленного в результате выполненного итерационного процесса приближенного решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджетов Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и Кубанского государственного технологического университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
2. Saad J. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: PWS Publishing Co., 1996.
3. Olshanskii M. A., Tyrtyshnikov E. E. Iterative methods for linear systems: theory and applications. Philadelphia: SIAM, 2014.
4. Ильин В. П. Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813; DOI: 10.31857/S0044466921110090
5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
6. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems. Philadelphia: SIAM, 1997.
7. Greenbaum A., Trefethen L. N. GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as Matrix Approximation Problems // SIAM J. Sci. Comput. 2018. V. 15, N 2. P 359–368.
8. Ильин В. П. О проекционных методах в подпространствах Крылова // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т 472. С. 103–119.
9. Киреев И. В. Ортогональные проекторы и системы линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 315–324.
10. Arioli M., Fassino C. Roundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods // BIT Numer. Math. 1996. V. 36, N 2. P. 189–206.
11. Arioli M. Generalized Golub—Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34, N 2. P. 57–592.
12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18, N 3. P.535–551.
13. Capraux J.-F., Godunov S. K., Kuznetsov S. V. Condition number of the Krylov bases and subspaces // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248, N 1–3. P. 136–160.
14. Kuznetsov S. V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms // Linear Algebra Appl. 1997. V. 265, N 1–3. P. 1–28.
15. Мальшев А. Н., Садкане М. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 3. С. 391–399.
16. Babenko V. N. On the Structure of Closeness Estimates for Pseudosolutions of Initial and Perturbed Systems of Linear Algebraic Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59, N 9. P. 1399–1421; DOI: 10.1134/S0965542519090069
17. Бабенко В. Н. Аспекты машинного решения систем линейных уравнений: монография. Краснодар: Экоинвест, 2020.
18. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
19. Годунов С. К. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах: монография. Новосибирск: Наука, 1988.