ПРОГРАММА

вступительных испытаний по специальности 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы и комплексы

(секция «Математическое моделирование и методы прикладной математики»)

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Математический анализ

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях. Основные теоремы дифференциального исчисления, теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора.
Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина, Остроградского, Стокса).

Основы теории функций комплексного переменного

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теоре- ма Морера. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.

Основы функционального анализа

Конечномерные вещественные пространства (характеристики открытых, замкнутых и компактных множеств).
Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова).
Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини.
Основные нормированные пространства, Полнота, сепарабельность, крите-рий компактности, сильная и слабая сходимости.
Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса - Фишера. Ряды и интегралы Фурье.
Элементы теории линейных операторов. Теорема Бахана об обратном операторе. Теорема Хана - Бахана. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и от параметров.

Общая теория линейных систем

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы. Построение общего решения. Неоднородные линейные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение n-го порядка. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теория устойчивости

Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнения второго порядка. Собственные числа. Собственные функции. Функция Грина.

Основные понятия алгебры

Алгебраические операции и алгебраические системы. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

Теория определителей

Определитель квадратной матрицы и его простейшие свойства. Поведение определителя при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях системы строк и столбцов матрицы и умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и формула для обратной матрицы.

Векторные пространства

Линейная зависимость, база и ранг системы векторов, размерность пространства. Изоморфизм любого пространства некоторому пространству строк. Преобразование координат вектора при смене пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы и пересечения подпространств, фактор-пространства.

Системы линейных уравнений

Теорема о ранге для матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отыскание). Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений).

Многочлены

Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неразложимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Формулы Виета и основная теорема о симметрических многочленах.

Линейные преобразования векторных пространств

Изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантные подпространства.

Квадратичные формы

Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Положительно определенные формы (критерий Сильвестра).

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Введение

Характеристика уравнений в частных производных. Постановка задач для уравнений математической физики. Понятие о корректности постановок. Пример Адамара.

Гиперболические уравнения

Приведение к каноническому виду гиперболической системы 1-порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши и смешанная задача в квадрате для этой системы. Теорема существования и единственности. Одномерное волновое уравнение (струна). Постановка задач и формулы для их решения. Интеграл энергии. Теорема единственности решения задачи Коши и смешанной задачи. Априорные оценки решения волнового уравнения.

Параболические уравнения

Принцип максимума. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения уравнения теплопроводности по начальным значения температуры (задача Коши). Разностный метод решения уравнения теплопроводности. Явные и неявные разностные схемы. Метод прогонки решения одномерных неявных трехточечных разностных уравнений.

Метод Фурье

Преобразование Фурье. Формула Фурье. Простейшие оценки типа вложения. Применение метода Фурье к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Задача о колебаниях в ограниченном объеме. Схема метода разделения переменных.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Численные методы линейной алгебры

Вычисление наибольшего по модулю собственного значения матрицы. Итерационные методы. Способы ускорения сходимости. Градиентные методы. Методы ортогонализации. Метод прогонки. Устойчивость метода.

Общая теория разностных схем

Аппроксимация. Аппроксимационная вязкость. Устойчивость. Достаточные признаки устойчивости. Сходимость. Теорема Лакса об эквивалентности. Вариационно-разностные схемы.

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Предмет и методы МСС. Уравнения, описывающие движение сплошной среды: уравнение неразрывности, закон сохранения количества движения и закон сохранения энергии.

Основные модели сплошных сред. Модель идеальной жидкости. Уравнения Эйлера. Полные системы уравнений для идеальной, несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Тензор напряжений. Ньютоновская жидкость. Уравнения Навье-Стокса. Постановка основных краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса.

Вихревые и потенциальные движения. Уравнение для функции тока. Свойства вихрей. Теорема Томсона о циркуляции скорости. Теорема Лагранжа. Теоремы Гельмгольца.

Интегралы уравнений движения жидкости в потенциальном поле внешних сил. Интеграл Бернулли. Интеграл Коши – Лагранжа.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Общие формы классической (линейной) теории упругости. Различные формы закона Гука для однородного изотропного упругого тела. Первая, вторая и смешанная - основные краевые задачи статики упругого тела. Уравнения Ламе.

Теоремы единственности решения основных краевых задач динамики упругого тела. Закон Гука для анизатропных упругих сред. Колебания упругих тел. Продольные и поперечные волны, скорости их распространения. Поверхностные волны Релея. Волны Лява.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Основные виды научных исследований. Значение математики и вычислительной техники в научных исследованиях. Определение понятия «модель», функции моделей при проведении научных исследований. Обоснование корректности моделей. Основные этапы моделирования. Детерминированные и стохастические модели. Общие принципы математического моделирования. Построение математической модели на основе законов сохранения. Требования к вычислительным алгоритмам для реализации математической модели на ЭВМ. Методы распараллеливания численных алгоритмов.

Литература

1. *Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: «Физматлит», 2006. Т. 1 – 3.*
2. *Фомин С.В., Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2009 г.*
3. *Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т. 1,2, Физматлит, М., 2002,*
4. *Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 2003*
5. *Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984.*
6. *Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.*
7. *Петровский И.Г Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Издательство:ФИЗМАТЛИТ 2009*
8. *Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений, Москва, Комкнига, 2007.*
9. *Курош А. Г. "Курс высшей алгебры". М.: Наука, 2007.*
10. *Кострикин А.И. "Введение в алгебру". Ч. 1, 2: Наука, 2004.*
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики Москва Наука, 2004.*

12. *Самарский А. А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2005.*
13. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 2008*
14. *Березин Н.О., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1, 2, М., 1962.*
15. *Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1972.*
16. *Фаддеев Д.К. Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Ф.М., 1963.*
17. *Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. – М.: Наука, 2004.*
18. *Ждан С. А., Рябченко В. П., Тешуков В. М. Лекции по гидродинамике. Уч. пособие. НГУ, 2002.*
19. *Кибель И.А., Кочин В.Е., Розе. Теоретическая гидродинамика. Т.1, 2.*
20. *Бетчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.*
21. *Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005 г.*
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001.*
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2003. Т. VII. Теория упругости.*
24. *Седов Л.И. Механика сплошной среды (комплект из 2 книг). Серия: Классический университетский учебник, Издательство: Лань, 2004 г.*