ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИВМиМГ СО РАН)**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИВМиМГ СО РАН
_____________ М.А. Марченко
«21» октября 2022 г

ПРОГРАММА

Кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.6. Вычислительная математика

Согласовано:
Зам. директора по научной работе д.ф.-м.н. А.В. Пененко

Новосибирск 2022

Программа кандидатского экзамена по научной специальности 1.1.6 - Вычислительная математика

1. Функциональный анализ

1.Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

2.Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

3.Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

4.Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

5.Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

6.Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

7.Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

8.Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^1. Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

1.Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2.Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении.

Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

3.Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

4.Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

3. Численные методы

1.Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

2.Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

3.Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

4.Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

5.Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

6.Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

7.Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

8.Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

9.Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

10.Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.

Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.

Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.

Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,

Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.

Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.

Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.

Дополнительная литература

Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.