ONE PROBLEM OF THE OPTIMIZATION RESOURCE DISTRIBUTION IN HIERARCHICAL NETWORKS

Zhusupbaev A., Toktoshov G. Y.*

Institute of theoretical and applied mathematics,
720071, Bishkek, Kyrgyz Republic
*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia

The paper deals with one of the applied problems in the design and modernization of the distribution points of the various services (eg, gas, oil, and water) — the problem of the optimal distribution of production and distribution of resources between consumers and suppliers, taking into account a variety of restrictive conditions. In this regard, the topic under consideration, relating to the design and development of the mathematical apparatus to describe, analyze, and optimize network engineering maintenance vehicle type is relevant.

In this paper, engineering support network is seen as a hierarchical system of the vehicle type, two-stage, respectively solved the problem of accommodation with a nonlinear objective function. It is assumed that resources (oil, gas, water, etc.) are transferred in this system from producers to consumers through processing by points connections (transport channels). Such systems are characterized by the presence of so-called fixed costs to be made regardless of the target volume production and processing (gas, oil, etc.). The account in the models of these and similar factors leads to the appearance of their objective functions that do not possess the property of continuity. Therefore, the problem of resource allocation in hierarchical networks, is seen as a two-stage problem of placing items resource production and distribution with discontinuous objective function. This class of problems, which bears the character of multi considerably complicates the search for an extremum of the objective function, and can not be solved in the general case. Thus, there is a need to develop a new method of solving the problem, when the functions that determine the cost of production, transportation and processing of products are non-linear.

In this regard, the aim of this work is to develop new mathematical models and methods for analysis and optimization of engineering support transport-type networks with a hierarchical structure. The goal is achieved as a result of research and development of the mathematical apparatus and optimization techniques for the design and optimization of engineering support such as transport networks, taking into account the various restrictive conditions of feasibility, natural, environmental, situational and character, as well as legal and budgetary constraints of the region.

Note that the distribution of production and resource allocation problems have a wide range of applications that arise when designing of engineering networks for different purposes, in problems of logistics facilities and power systems, planning and reconstruction transport-type networks, routing service networks and other areas.

The paper studied and proved a sufficient condition for the applicability of the method of successive two-step calculation for the problem of locating the production and processing of non-linear functions of transport, operating costs and expenses for processing at various restrictive conditions. A combinatorial method for optimizing the placement based on the method of consecutive calculations, which allows to calculate the best option to deploy elements of communications and network engineering plan (volume) of the transported goods from sources to consumers by the criterion of minimum total cost of production of the raw material, its processing and transportation. The proposed method makes it possible, though, and by the partial sorting, finding the global extremum multiextremal problem with any degree of accuracy.

The proposed methods and models allow to carry out a reliable analysis and optimization of engineering support networks and can be used in the design organizations involved in the design, construction and operation of networks for different purposes.

Key words: networks location problem, the method of successive calculations, placement plan, the optimal output of production.

References

1. Lotarev D. T. Neformalnye opisatelnye modeli transpotnykh kommunikatsiy, transpotnykh setey I territoriy v zadachakh o prokladke putey I kommunikatsiy [Unformal descriptive models of transport communications, transport networks and territory in the problem of construction of ways and communications] // Trudy ISA RAN. 2009. V. 46. P. 259–273

2. Melkumov V. N., Kuznetsov I. S., Kuznetsov R. N. Opredelenie optimalnogo marshruta trassy gazoprovoda na osnove kart stoimosti vliyayushchikh faktorov [Determination of the optimal route of the gas pipeline on the basis of the factors affecting the value of cards] // Nauch. vestn. VGASU. Stroitelstvo i arkhitektura. 2009. N 1 (13). P. 21–27.

3. Kolokolov A. A., Kosarev N. A. Issledovanie otsecheniy Bendersa dlya zadachi o p-mediane [Baderses clipping research for the problem of p-median]// International conference „Optimization problems and economic applications“. Omsk. 2003. P. 96.

4. Kochetov JU. A. Zadacha ob (r,p)-cenroide [The problem of (r,p)-centroid] // International conference „Optimization problems and economic applications“. Omsk. 2009. P. 68.

5. Sarychev D. S. Sovremennye informatsionnye sistemy dlya inzhenernykh setey [Modern information systems for engineering networks] // Vestnik TGU. 2003. N 280. P. 358–361.

6. Skvortsov A. V. Razrabotka geoinformatsionnykh system na fakultete iformatiki I v OOO „Indorsoft“ [Development geographic information and engineering systems at the faculty of Informatics and OOO „Indorsoft“] // Vestnik TGU. 2003. N 280. P. 346–349.

7. Boikov V. N., Shumilov B. M. Splainy v trassirovanii avtomobilnykh dorog [The splines in the routing of roads]. Tomsk. 2001.

8. Lempert A. A. Matematicheskaya model I programmnaya sistema dlya razmesheniya zadach logisticheskikh obektov [Mathematical model and software system for the solution of location problems of logistics objects] / A. A. Lempert, A. L. Kazakov., D. S. Bukharov // Management of big systems. 2013. N 41. P. 270–284.

9. Kosyakov S. V. Myagkie vychisleniya v postrornii kart zonirovaniya territorij po parametram system energosnabzheniya [Soft computing in mapping zoning by the parameters of power supply systems] // S. V. Kosyakov, S. S. Novoseltseva, A. M. Sadykov // International scientific-technical conference „The state and prospects of development of electrotechnology“. Ivanovo, 2013. P. 338–341.

10. Prilutskiy M. X., Afraiymovich L. G. Raspredelenie resursov v ierarkhicheskikh sistemakh transportnogo tipa: uchebnoe posobie [Distribution of resources in hierarchical systems of transport type: textbook] / M. X. Prilutskiy, L. G. Afraiymovich. Nizhny Novgorod. 2007.

11. Erzin A. I. Zadachi marshrutizatsii: uchebnoe posobie [The routing problem: textbook] / A. I. Erzin, JU. A. Kochetov. Novosibirsk, 2014.

12. Lange E. G., Zhusupbaev A. Kombinatorniy metod resheniya zadachi razmesheniya [Combinatorial method for solving location problem]. Frunze, 1991.

13. Cherenin V. P. Reshenie nekotorykh kombinatornikh zadach optimalnogo planirovaniya metodom posledovatrlnikh raschetov [The solution of some combinatorial problems optimal planning by methods of successive calculations]. Moscow, 1962.

14. Zhusupbaev A., Sharshembieva F. K. Reshenie dvukhetapnoy zadachi razmesheniya s nelineynoy tselevoy funktsiey [The solution of the two-stage location problem with nonlinear objective function] // Vestnik KNU. 2013. Vypusk 1. P. 21–29.

15. Asankulova M., Zhusupbaev A. Optimizatsiya dobichy I raspredeleniya sirya mezhdu potrebitelyami v zavisimosti ot perioda[Resources extraction and distribution optimization between consumers depending on the period] / Modern problems of science and education. 2016. N 4. P. 7–12.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЯХ

А. Жусупбаев, Г. Ы. Токтошов*

Институт теоретической и прикладной математики НАН КР,
720071, Бишкек, Киргизия
*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.8:624.9

В работе рассматривается одна из прикладных проблем в области оптимизации пунктов распределения различных услуг (например, газо-, нефте-, и водоснабжения) — проблема оптимального размещения производств и распределения ресурсов между потребителями и поставщиками с учетом различных ограничительных условий. Рациональное размещение элементов сетей инженерных коммуникаций по переработке и распределению ресурсов между потребителями является сложной технико-экономической задачей. При ее решении необходимо учесть не только ресурсные ограничения, но план переработки и распределения ресурсов между потребителями, обеспечивающие эффективную схему функционирования проектируемой сети. В работе рассматривается задача оптимального распределения однородного ресурса в иерархических сетях и ее решение методом последовательных расчетов. Предлагаемый метод позволяет, хотя и посредством частичного перебора, находить глобальный экстремум многоэкстремальной задачи с высокой степенью точности.

Ключевые слова: сети, задача размещения, метод последовательных расчетов, план размещения, оптимальный объем производства.

Введение. Инженерная коммуникация — это сложный территориально-распределенный комплекс, который выполняет такие жизненно важные функции, как обеспечение потребителей энергетическими и водными ресурсами, средствами связи, информацией, маршрутной сетью, транспортом и другими услугами. Она включает местные органы власти, хозяйствующие субъекты и потребителей, а также рассматривает характер взаимоотношений между ними.

Отметим, что с ростом масштаба городов стремительно увеличиваются объемы целевой продукции (информации, энергии, продукта), потребляемой в промышленности, сельском хозяйстве и коммунально-бытовом обслуживании населения. В связи с этим возникает необходимость проектирования новых или модеринизация существующих инженерных коммуникаций (водопроводы, газопроводы, нефтепроводы, электрические и телекоммуникационные сети, сети автомобильных и железных дорог, пути авиасообщений и др.), которые должны обеспечивать передачи целевого продукта от источников к новым потребителям.

В настоящее время существует большое количество работ, связанных с проектированием и строительством сетей различного назначения. В частности, в [1, 2] рассматриваются вопросы поиска оптимальных маршрутов для прокладки инженерных сетей различного назначения, в [3, 4] — задачи размещения объектов строительства на заданной территории, в [5, 6] — возможность применения ГИС-технологий в трассировании и размещение линейных объектов, а в [7] — применения сплайнов в оптимизации трассирования автомобильных дорог. Кроме того, задачи размещения производства и распределения ресурсов возникают и в других смежных областях, таких как размещение логистических объектов [8] и систем энергоснабжения [9], планирование и реконструкция сетей транспортного типа [10], а также в маршрутизации сетей обслуживания [11].

Во всех этих работах сети инженерных коммуникаций рассматривают как двумерный объект, размещенный на плоскости. Такое двумерное представление сетей, с нашей точки зрения, не соотвествует реальности, поскольку основе проектирования и строительства сетей лежит взаимодействие не менее чем двух объектов. Другими словами, в отличие от предшественников, в настоящей работе сети инженерного обеспечения рассматриваются как иерархическая система транспортного типа, в которой ресурсы (газ, нефть, вода и т. п.) передаются от производителей к потребителям через пункты переработки посредством связей (транспортных каналов). Такие системы характеризуются наличием так называемых постоянных затрат, которые должны быть произведены независимо от объема производства и переработки целевой продукции (газ, нефть, вода и т. п.). Учет в моделях этих и подобных факторов приводит к появлению в них целевых функций, не обладающих свойством непрерывности. Поэтому задача распределения ресурсов в иерархических сетях рассматривается как двухэтапная задача размещения пунктов производства и распределения ресурсов с разрывной целевой функцией. Такой класс задач, носящий многоэкстремальный характер, существенно затрудняет поиск экстремума целевой функции и не поддается решению в общем случае. В связи с этим возникает необходимость разработки нового метода решения задачи, когда функции, определяющие затраты на производство, транспортировку и переработку продукции, являются нелинейными, а структура проектируемой сети имеет иерархический характер.

1. Постановка задачи. Крупная компания в регионе имеет m пунктов производства сырья $A_i, i = 1, 2, \dots, m$, с искомыми объемами производства $x_i, 0 \leqslant x_i \leqslant a_i, i = 1, 2, \dots, m$, и n возможных пунктов переработки этого сырья B_j, с объемами переработки $y_j, 0 \leqslant y_j \leqslant Q_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Согласно договору, сырье, переработанное на этих предприятиях, в свою очередь должно доставляться на P пункты потребителей $\Pi_k, k = 1, 2, \dots, p$ с известными объемами потребности равной, $b_k, k = 1, 2, \dots, p$.

Будем считать, что все сведения о размерах производства сырья, его переработки и потребления приведены к одной единице измерения.

Для каждого возможного пункта переработки $B_j, j = 1, 2, \dots, n$ известна функция $\overline{\psi_j}(y_j)$, которая определяет затраты на переработку сырья объемом $y_j, j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, для каждого пункта производства сырья $A_i, i = 1, 2, \dots, m$, известна функция $\varphi_i(x_i)$, которая определяет затраты на производство сырья объемом $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, а также известны функции $\varphi_{ij}(x_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \psi_{ik}(y_{ik}), j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p$, определяющие матрицу транспортных расходов.

Требуется определить оптимальный план размещения перерабатывающих предприятий, план $x_{ij} \geqslant 0$, перевозки сырья на перерабатывающие предприятия и план $y_{jk} \geqslant 0$ распределения переработанного сырья между потребителями, минимизирующие суммарные затраты на производство сырья, ее переработку и транспортировку.

2. Математическая модель. Изложенная проблема может быть представлена следующей экстремальной задачей: найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(x_{ij})+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk})+\sum_{j=1}^{n}\overline{\psi}_j(y_j) \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=x_i\leqslant a_i, i=1,2,\dots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{k=1}^{p}y_{jk}=y_j\leqslant Q_j, j=1,2,\dots,n, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{jk}=b_k, k=1,2,\dots,p, \qquad (4)$$

$$x_i\geqslant 0, x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n, \qquad (5)$$

$$y_j\geqslant 0, y_{jk}\geqslant 0, j=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots,p, \qquad (6)$$

где $x=|x_{ij}|_{m,n}, y=|y_{jk}|_{n,p}$. Предполагается, что

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{p}b_k\leqslant\sum_{j=1}^{n}Q_j, 0\leqslant\sum_{k=1}^{p}b_k\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_i. \qquad (7)$$

Рассмотрим способ решения задачи (1)–(7) в случае, когда функции $\varphi_{ij}(x_{ij})=c_{ij}x_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n, \varphi_i(x_i)=c_ix_i, x_i\in[0,a_i], i=1,2,\dots,m$; $\psi_{jk}(y_{jk})$ — выпуклые возрастающие функции по $y_{jk}\in[0,b_k], j=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots,p$, а $\overline{\psi_j}(y_j)=\psi_j(y_j)+T_j\theta(y_j), j=1,2,\dots,n$, где $\psi_j(y_j)$ — выпуклая возрастающая функция по $y_j\in(0,Q_j], j=1,2,\dots,n$.

В этом случае задача (1)–(6) примет вид найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk})+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(y_j)+T_j\theta(y_j), \qquad (8)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i, i=1,2,\dots,m, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{k=1}^{p}y_{jk}=y_j\leqslant Q_j, j=1,2,\dots,n, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{jk}=b_k, k=1,2,\dots,p, \qquad (11)$$

$$x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n, \qquad (12)$$

$$y_j \geqslant 0, y_{jk} \geqslant 0, j = 1,2,\ldots,n, k = 1,2,\ldots,p, \tag{13}$$

где $\overline{c_{ij}} = c_{ij} + c_i, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n.$

Из (8)–(13) легко заметить, что функции $\overline{\psi_j}(y_j), j = 1,2,\ldots,n$ разрывные в начале координат. Это обстоятельство сильно затрудняет нахождение глобального минимума задачи, так как локальный минимум не может совпадать с глобальным. Поэтому для задачи (8)–(13) стандартный метод решения преобразуем к комбинаторным методам с использованием метода последовательных расчетов [12] и идей, предложенных в [14, 15].

3. Метод последовательных расчетов. Преобразуем задачу (8)–(13) к следующему виду:

$$L(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{c_{ij}}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}) + \sum_{j=1}^{n+1}\psi_j(Q_j - \zeta_j) + T_j\theta(Q_j - \zeta_j) \tag{14}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} y_{jk} = Q_j - \zeta_j, \quad j = 1,2,\ldots,n+1, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} y_{jk} = b_k, \quad k = 1,2,\ldots,p, \tag{17}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n+1, \tag{18}$$

$$\zeta_j \geqslant 0, \quad y_{jk} \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n+1, \quad k = 1,2,\ldots,p, \tag{19}$$

где $Q_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{k=1}^{p} b_k, \overline{c_{i,n+1}} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad c_{j,n+1} = \begin{cases} M, j = 1,2,\ldots,n, \\ 0, j = n+1, \end{cases}$

$\psi_{n+1,k}(y_{n+1,k}) = M, k = 1,2,\ldots,p, \psi_{n+1}(Q_{n+1} - \zeta_{n+1}) = 0,$

$T_{n+1} = 0, \theta(\theta_j - \zeta_j) = \begin{cases} 0, \zeta_j = Q_j, \\ 1, \zeta_j < Q_j, \quad j = 1,2,\ldots,n,n+1. \end{cases}$

Обозначим через $J = \{1,2,\ldots,n,n+1\}$ множество, состоящее из $n+1$ индексов перерабатывающих предприятий $B_j, j = 1,2,\ldots,n,n+1$, а через δ — произвольные подмножество множества J. В дальнейшем будем считать, что $n+1$ является элементом любого подмножества $\delta \subset J$. Тогда на каждом подмножестве $\delta \subset J$ может быть определено минимальное значение $P(\delta)$ согласно формуле:

$$P(\delta) = \min_{x,y}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{\delta \subset J}\overline{c_{ij}}x_{ij} + \sum_{\delta \subset J}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}) + \sum_{\delta \subset J}\psi_j(Q_j - \zeta_j) + \sum_{\delta \subset J} T_j\right\} \tag{20}$$

при условиях

$$\sum_{\delta \subset J} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\ldots,m, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} y_{jk} = Q_j - \zeta_j, j \in \delta, \tag{22}$$

$$\sum_{\delta \subset J} y_{jk} = b_k, k = 1, 2, \ldots, p, \tag{23}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m, j \in \delta, \tag{24}$$

$$\zeta_j \geqslant 0, y_{jk} \geqslant 0, j \in \delta, k = 1, 2, \ldots, p, \tag{25}$$

Тогда исходная задача может быть сформулирована следующим образом: требуется определить подмножество $\delta^* \subset J$, на котором $P(\delta)$ достигла бы своего наименьшего значения $P(\delta^*)$, т. е. найти

$$P(\delta^*) = \underset{\delta \subset J}{m} in P(\delta). \tag{26}$$

Как известно из [12], достаточное условие применимости метода последовательных расчетов для нахождения $\underset{\delta \subset J}{m} in P(\delta)$ имеет вид

$$s(\delta_1,\delta_2) = p(\delta_1) + p(\delta_2) - p(\alpha) - p(\beta) \leqslant 0, \tag{27}$$

где δ_1, δ_2 — произвольные подмножества множества $J, \alpha = \delta_1 \bigcup \delta_2, \beta = \alpha = \delta_1 \bigcap \delta_2$.

Для задачи (26) условие (27) занимается в виде

$$\begin{aligned} s(\delta_1,\delta_2) = \underset{x,y}{min} \left\{ \sum_{j\in\delta_1} \sum_{i=1}^{m} \overline{c_{ij}} x_{ij} + \sum_{j\in\delta_1} \left(\sum_{k=1}^{p} \psi_{jk}(y_{jk}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j) + T_j \right) \right\} + \\ + \underset{x,y}{min} \left\{ \sum_{j\in\delta_2} \sum_{i=1}^{m} \overline{c_{ij}} x_{ij} + \sum_{j\in\delta_2} \left(\sum_{k=1}^{p} \psi_{jk}(y_{jk}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j) + T_j \right) \right\} - \\ - \underset{x,y}{min} \left\{ \sum_{j\in\alpha} \sum_{i=1}^{m} \overline{c_{ij}} x_{ij} + \sum_{j\in\alpha} \left(\sum_{k=1}^{p} \psi_{jk}(y_{jk}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j) + T_j \right) \right\} - \\ - \underset{x,y}{min} \left\{ \sum_{j\in\beta} \sum_{i=1}^{m} \overline{c_{ij}} x_{ij} + \sum_{j\in\beta} \left(\sum_{k=1}^{p} \psi_{jk}(y_{jk}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j) + T_j \right) \right\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Из введения множеств α и β легко заметить, что

$$\sum_{j\in\delta_1} T_j + \sum_{j\in\delta_2} T_j = \sum_{j\in\alpha} T_j + \sum_{j\in\beta} T_j.$$

Далее, предположим, что для задачи (14)–(19) на множествах δ_1 и δ_2 существуют допустимые планы $|x_{ij}^{\delta_1}, y_{jk}^{\delta_1}|, |x_{ij}^{\delta_2}, y_{jk}^{\delta_2}|$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$x_{ij}^{\alpha} = \begin{cases} x_{ij}^{\delta_1}, j \in \alpha \setminus \delta_2, \\ x_{ij}^{\delta_2}, j \in \alpha \setminus \delta_1, i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{29}$$

$$y_{jk}^{\alpha} = \begin{cases} y_{jk}^{\delta_1}, j \in \alpha \setminus \delta_2, \\ y_{jk}^{\delta_2}, j \in \alpha \setminus \delta_1, k = 1, 2, \ldots, p, \end{cases} \tag{30}$$

$$x_{ij}^{\delta_1} + x_{ij}^{\delta_2} = x_{ij}^{\alpha} + x_{ij}^{\beta}, j \in \beta, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{31}$$

$$y_{jk}^{\delta_1} + y_{jk}^{\delta_2} = y_{jk}^{\alpha} + y_{jk}^{\beta}, j \in \beta, k = 1, 2, \ldots, p, \tag{32}$$

$$min\Big\{Q_j - \zeta_j^{\alpha}, Q_j - \zeta_j^{\beta}\Big\} \leqslant Q_j - \zeta_j^{\delta_1}, Q_j - \zeta_j^{\delta_2} \leqslant max\Big\{Q_j - \zeta_j^{\alpha}, Q_j - \zeta_j^{\beta}\Big\}, \tag{33}$$

где $|x_{ij}^{\alpha}, y_{jk}^{\alpha}|$ — определенный план задачи (14)–(19) на множестве α, $|x_{ij}^{\beta}, y_{jk}^{\beta}|$ — на множестве β.

Тогда для доказательства достаточного условия применимости метода последовательных расчетов достаточно показать, что

$$\begin{aligned}
\overline{s}(\delta_1,\delta_2) = \sum_{j\in\delta_1}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\delta_1} + \sum_{j\in\delta_1}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_1}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_1})\right) + \\
+\sum_{j\in\delta_2}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\delta_2} + \sum_{j\in\delta_2}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_2}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_2})\right) - \\
-\sum_{j\in\alpha}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\alpha} - \sum_{j\in\alpha}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\alpha}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\alpha})\right) - \\
-\sum_{j\in\beta}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\beta} - \sum_{j\in\beta}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\beta}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\beta})\right) \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Действительно, так как $|x_{ij}^{\delta_1}, y_{jk}^{\delta_1}|, |x_{ij}^{\delta_2}, y_{jk}^{\delta_2}|$ не является оптимальным планом соответствующих задач, то справедливы неравенства

$$P(\delta_1) \leqslant \sum_{j\in\delta_1}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\delta_1} + \sum_{j\in\delta_1}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_1}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_1}) + T_j\right),$$

$$P(\delta_2) \leqslant \sum_{j\in\delta_2}\sum_{i=1}^{m}\overline{c_{ij}}x_{ij}^{\delta_2} + \sum_{j\in\delta_2}\left(\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_2}) + \psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_2}) + T_j\right).$$

Следовательно, $s(\delta_1,\delta_2) \leqslant \overline{s}(\delta_1,\delta_2)$, поэтому из $\overline{s}(\delta_1,\delta_2) \leqslant 0$ следует $s(\delta_1,\delta_2) \leqslant 0$.

Используя условия (29)–(32), из (34) получаем

$$\begin{aligned}
\overline{s}(\delta_1,\delta_2) = \sum_{j\in\beta}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_1}) + \sum_{j\in\beta}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_2}) - \sum_{j\in\beta}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\alpha}) - \sum_{j\in\beta}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\beta}) + \\
+\sum_{j\in\beta}\psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_1}) + \sum_{j\in\beta}\psi_j(Q_j - \zeta_j^{\delta_2}) - \sum_{j\in\beta}\psi_j(Q_j - \zeta_j^{\alpha}) - \sum_{j\in\beta}\psi_j(Q_j - \zeta_j^{\beta}).
\end{aligned} \tag{35}$$

Из (35), используя свойства выпуклости функций, имеем

$$\sum_{j\in\beta}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_1})+\psi_{jk}(y_{jk}^{\delta_2})-\psi_{jk}(y_{jk}^{\alpha})-\psi_{jk}(y_{jk}^{\beta})+$$
$$+\sum_{j\in\beta}\psi_j(Q_j-\zeta_j^{\delta_1})+\psi_j(Q_j-\zeta_j^{\delta_2})-\psi_j(Q_j-\zeta_j^{\alpha})-\psi_j(Q_j-\zeta_j^{\beta})\leqslant 0. \quad (36)$$

Таким образом, достаточные условия (27) применимости метода последовательных расчетов доказаны для задачи (26) в предположении о существовании допустимых планов $|x_{ij}^{\delta_1}, y_{jk}^{\delta_1}|, |x_{ij}^{\delta_2}, y_{jk}^{\delta_2}|$ удовлетворяющих условиям (29)–(33).

Остается выяснить, существуют ли для рассматриваемой задачи такие допустимые планы. Доказательство этого утверждения не будем здесь приводить, так как оно проводится аналогично приведенному доказательству в [12].

Приведенное доказательство условия (27) для задачи (26) позволяет использовать для нахождения $\underset{\delta\subset s}{m}in\{P(\delta)\}$ комбинаторный метод решения задач размещения [12], основанный на методе последовательных расчетов, предложенном в [13].

Сущность этого метода состоит в замене исходной задачи более простой вспомогательной линейной задачей, для которой удается находить оптимальные решения. В отличие от классических методов оптимизации, предложенный комбинаторный метод позволяет на основе частичного перебора найти глобальный оптимум исходной задачи. Другими словами, вместо 2^m возможных вариантов приходится просчитывать лишь $m^2 \backsim m^3$ вариантов.

Заключение. Доказано достаточное условие применимости метода последовательных расчетов для двухэтапной задачи размещения производства и переработки с нелинейными функциями транспортных, производственных затрат и затрат на переработку при различных ограничительных условиях. Предложен комбинаторный метод оптимизации размещения, основанный на методе последовательных расчетов, позволяющий вычислить оптимальный вариант размещения элементов сетей инженерных коммуникаций и план (объем) транспортируемой продукции от источников к потребителям по критерию минимума суммарных затрат на производство сырья, его переработки и транспортировки. Предлагаемый метод позволяет, хотя и посредством частичного перебора, находить глобальный экстремум многоэкстремальной задачи с любой степенью точности.

Список литературы

1. Лотарев Д. Т. Неформальные описательные модели транспортных коммуникаций, транспортных сетей и территорий в задаче о прокладке путей и коммуникаций // Труды ИСА РАН 2009. Т. 46. С. 259–273.

2. Мелькумов В. Н., Кузнецов И. С., Кузнецов Р. Н. Определение оптимального маршрута трассы газопровода на основе карт стоимости влияющих факторов // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2009. № 1 (13). С. 21–27. Строительство и архитектура / Воронеж. гос. архит.-строит. ун-т. Воронеж, 2009. № 4 (16). С. 31-38.

3. Колоколов А. А., Косарев Н. А. Исследование отсечений Бендерса для задачи о p-медиане // Материалы Всерос. конф. „Проблемы оптимизации и экон. прил.“. Омск, 2003. С. 96.

4. Кочетов Ю. А. Задача об (r,p)-центроиде // Материалы IV Всерос. конф. „Проблемы оптимизации и экон. прил.“. Омск, 2009. С. 68.

5. Сарычев Д. С. Современные информационные системы для инженерных сетей // Вестник ТГУ. 2003. №280. С. 358–361.

6. Скворцов А. В. Разработка геоинформационных и инженерных систем на факультете информатики и в ООО „Индорсофт“ // Вестник ТГУ, 2003. № 280 С. 346–349.

7. Бойков В. Н. Сплайны в трассировании автомобильных дорог / В. Н. Бойков, Б. М. Шумилов. Томск: ЦНТИ, 2001. 1

8. Лемперт А. А. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов// А. А. Лемперт, А. Л. Казаков., Д. С. Бухаров/ Управление большими системами: сб. тр. 2013. № 41. С. 270–284.

9. Косяков С. В. Мягкие вычисления в построении карт зонирования территорий по параметрам систем энергоснабжения // С. В. Косяков, С. С. Новосельцева, А. М. Садыков / Состояние и перспективы развития электротехнологии: материалы международной научно-технической конференции Иваново, 2013. С. 338–341.

10. Прилуцкий М. Х. Афраймович Л. Г. Распределение ресурсов в иерархических системах транспортного типа: уебно-методический материал / М. Х. Прилуцкий, Л. Г. Афраймович Нижний Новгород, 2007.

11. Ерзин А. И. Задачи маршрутизации: учеб. пособие / А. И. Ерзин, Ю. А. Кочетов. Новосибирск, 2014.

12. Жусупбаев А. Комбинаторный метод решения задачи размещения / Э. Г. Ланге, А. Жусупбаев. Фрунзе, Илим, 1990.

13. Черенин В. П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов // Научно-методические материалы экономико-математического семинара лаборатории экономико-математических методов АН СССР. М., 1962.

14. Жусупбаев А., Шаршембиева Ф. К. Решение двухэтапной задачи размещения с нелинейной целевой функцией // Вестник КНУ. 2013. Вып. 1. С. 21–29.

15. Асанкулова М., Жусупбаев А. Оптимизация добычи и распределения сырья между потребителями в зависимости от периода // Проблемы современной науки и образованиям 2016. № 4. 2016. С. 7–12.

Жусупбаев Амангельди — д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией Института теоретической и прикладной математики НАН КР, тел.: +996(312) 64-26-73, e-mail: `aman_jus@mail.ru`.

Жусупбаев Амангельди окончил механико-математический факультет Киргизского государственного университета в 1968 году. В 1982 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности 08.00.13 в Вычислительном центре РАН (г. Москва). В 2001 году защитил докторскую диссертацию в Институте математики Национальной академии наук (ИМ НАН КР). В 1970 году он стал сотрудником НАН КР, с 1992 года возглавляет лабораторию экономико-математических методов.

Он основал и в настоящее время возглавляет школу по экономико-математическим методам в Кыргызской Республике. По результатам исследований им опубликовано свыше 120 научных работ. Он является одним из основателей Международной Азиатской школы-семинара „Проблемы оптимизации сложных систем“.

Основной сферой его научных интересов являются применение математических методов в экономике, построение экономико-математических моделей, развитие методов оптимизации и вопросы внедрения оптимизационных моделей в практику.

Zhusupbaev Amangeldi graduated from the Mechanics and Mathematics Faculty of the Kyrgyz State University in 1968. In 1982 he defended his thesis on the specialty 08.00.13 Computing Center Academy of Sciences (Moscow). In 2001 he defended his doctoral thesis at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences (NAS KR IM). In 1970 he became a member of National Academy of Sciences, head of the laboratory of Economics and mathematical methods since 1992.

He founded and currently heads the school of economic and mathematical methods in the Kyrgyz Republic. According to the results of his research, he has published over 120 scientific papers. He is a founding member of the

Asian International School-seminar „Problems of optimization of complex systems.“

The main area of his scientific interests is application of mathematical methods in economics, construction of mathematical economic models, the development of optimization methods and the implementation of optimization models in practice.

Токтошов Гулжигит Ысакович — канд. техн. наук, мадш. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, тел.: +7-952-913-96-25, e-mail: tgitok@rambler.ru.

Токтошов Гулжигит Ысакович окончил физико-математический факультет Ошского государственного университета (ОшГУ) в Кыргызской Республике в 2001 году. После окончания учебы был принят на кафедру „Математические методы“ в экономике, где преподавал до 2006 года.

В 2006 году поступил в очную аспирантуру Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ) в г. Новосибирск. В 2011 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности 15.13.18. в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН). В 2012 году стал сотрудником лаборатории системного моделирования ИВМиМГ СО РАН. Им опубликовано более 50 работ по анализу и оптимизации инженерных и транспортных сетей различного назначения. Он также совмещает научно-исследовательскую деятельность с преподаванием в качестве доцента кафедры математического моделирования бизнес-процессов СибГУТИ.

Является активным членом оргкомитета по организации и проведению Международной азиатской школы-семинара „Проблемы оптимизации сложных систем“. Его текущие исследовательские интересы включают эволюционные вычисления, метаэвристические алгоритмы, дискретную оптимизацию, анализ и оптимизацию систем сетевой структуры и др.

Toktoshov Gulzhigit Ysakovich graduated from the Physics and Mathematics Faculty of Osh State University (Osh State University) in the Kyrgyz Republic in 2001. After graduation, he was admitted at the Department of Mathematical Methods in Economics, where he taught until 2006.

In 2006 he entered the graduate school of the Siberian State University of Telecommunications and Informatics (SibSUTI) in Novosibirsk. In 2011 he defended his thesis on the specialty 15.13.18. at the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (ICM & MG SB RAS). In 2012 he became a member of the laboratory System simulation ICMMG SB RAS. He has published more than 50 papers on the analysis and optimization of engineering and transport networks for different purposes. Currently it combines research activity with teaching as an Associate Professor of Mathematics, Business Process Modeling SibSUTI. He is an active member of the organizing committee for the organization and holding of the Asian International School-seminar „Optimization problems of complex systems.“ His current research interests include evolutionary computation, metaheuristic algorithms, discrete optimization, analysis and optimization of systems of network structure.

Дата поступления — 27.09.2016